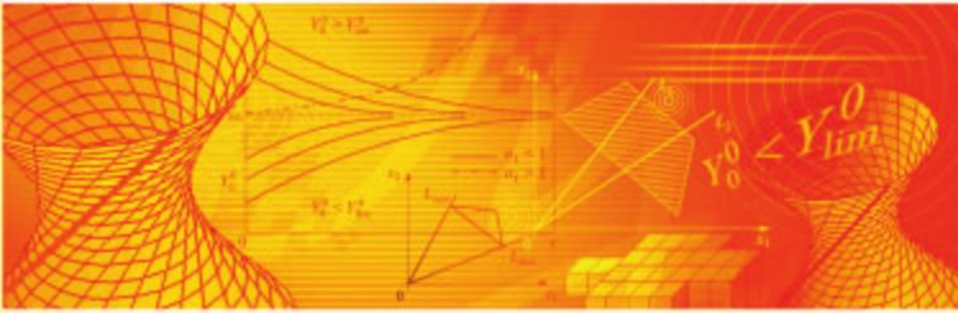
Учебное пособие

ПИТЕР

М. С. Красс Б. П. Чупрынов



Математические методы и модели для магистрантов экономики

2-е издание, дополненное

Математическое программирование и эконометрика

Инфляция и государственный долг

Эколого-экономические системы

Финансовая математика

РЕКОМЕНДОВАНО УМО

Красс М. С., Чупрынов Б. П.

Математические методы и модели для магистрантов экономики

Учебное пособие

2-е издание, дополненное

Рецензенты:

Голосов О. В. *— доктор экономических наук, профессор, засл. деятель науки РФ;*

Загузов И. С. *— доктор технических наук, профессор, засл. деятель науки РФ;*

Кафедра моделирования в экономике и управления РГГУ.

Заведующий редакцией	*А. Толстиков*
Руководитель проекта	*Е. Базанов*
Художник	*С. Маликова*
Корректор	*Н. Солнцева*
Верстка	*Л. Егорова*

ББК 65.в6я7 УДК 330(075)

Красс М. С., Чупрынов Б. П.

К78 Математические методы и модели для магистрантов экономики: Учебное пособие. 2-е изд., доп. — СПб.: Питер, 2010. — 496 с.: ил. — (Серия «Учебное пособие»).

ISBN 978-5-49807-811-3

Изложены основные математические методы и модели, необходимые в образовании магистрантов по направлению 521600 «Экономика» согласно Государственному образовательному стандарту высшего профессионального образования. Приведены основные элементы традиционных методов оптимизации в экономике, математической статистики и эконометрики. Книга содержит методы и модели по наиболее актуальным современным аспектам экономики: финансовой математике, инфляции, эколого-экономическим системам, динамике государственного долга, расчетам эффективности работы в сфере обслуживания, реинжинирингу.

Во 2-е издание добавлено несколько новых моделей и расчетов, обновлены уже имеющиеся примеры.

Для студентов, магистрантов, аспирантов и преподавателей экономических, смежных технических специальностей вузов, а также слушателей второго высшего образования.

Рекомендовано Учебно-методическим объединением по образованию в области экономики и экономической теории в качестве учебного пособия для студентов, обучающихся в магистратуре по направлению «Экономика» и другим экономическим специальностям.

ISBN 978-5-49807-811-3

ООО «Лидер», 194044, Санкт-Петербург, Б. Сампсониевский пр., 29а.

Налоговая льгота — общероссийский классификатор продукции ОК 005-93, том 2; 95 3005 — литература учебная.

Подписано в печать 27.04.10. Формат 60×90/16. Усл. п. л. 31. Тираж 1500. Заказ

Отпечатано с готовых диапозитивов в ООО «Типография Правда 1906». 191126, Санкт-Петербург, Киришская ул., 2.

Оглавление

Предисловие

Современная математика характеризуется интенсивным проникновением в другие науки; во многом этот процесс происходит благодаря дифференциации математики на ряд самостоятельных областей. Язык математики оказался универсальным, и это — объективное отражение универсальности законов окружающего нас многообразного мира.

Экономика, как наука об объективных причинах развития общества, еще со Средних веков пользуется разнообразными количественными характеристиками, и потому вобрала в себя большое число математических методов. Так, современный бухгалтерский учет основан на принципах, изложенных в 1494 г. в фундаментальном труде итальянского математика Луки Пачоли «Сумма арифметики, геометрии, учения о пропорциях и отношениях», в котором часть I, отдел 9 представляет собой трактат XI «О счетах и записях». Простейшие математические модели на уровне таблиц и формул использовались еще Ф. Кене в 1758 г. («Экономические таблицы), А. Смитом (классическая макроэкономическая модель), Д. Рикардо (модель международной торговли).

В XIX в. усилиями Л. Вальраса, О. Курно, В. Парето, Ф. Эджворта и других были сформированы основы математического подхода к исследованию рыночной экономики. В XX в. математическое моделирование экономических процессов получило бурное развитие; достаточно упомянуть Нобелевских лауреатов в области экономики — В. Леонтьева, Д. Хикса, Р. Солоу, П. Самуэльсона. Значительный вклад в развитие экономико-математических моделей внесли отечественные исследователи — Е. Е. Слуцкий, В. С. Новожилов, Л. В. Канторович.

Произошедшая в XIX в. «революция» в экономике обусловила активное использование разработанного математического аппарата. Более того, активность экономических исследований побуждает математиков к дальнейшему развитию математического инструментария.

Сегодня в экономической науке на первый план выступает математическая модель как инструмент исследования и прогноза экономических явлений. Историческая цепочка эволюции математики «явления окружающего мира — математические построения и абстракции — использование в объяснении явлений окружающего мира» отразилась на развитии математических моделей.

Математическую модель можно определить как внутренне непротиворечивую замкнутую систему математических соотношений (объект конечной сложности), предназначенную для воспроизведения определенного качества (или группы определенных качеств) изучаемого реального явления или процесса. Математические модели представляют собой основу компьютерного моделирования и обработки информации. Они развивают наши представления о закономерностях экономических процессов и способствуют формированию образа мышления и анализа на новом, более высоком уровне.

В последнее время для обозначения специфичности класса математических моделей, применяемых в экономике, употребляют термин «экономико-математическое моделирование». И это не случайно, поскольку экономическая теория давно уже использует элементы математики в своих выводах. Более того, настоятельность решения актуальных экономических проблем часто инициирует и развитие математического аппарата. Например, появление класса продуктивных матриц в линейной алгебре обусловлено исследованием моделей межотраслевого баланса; математическое программирование в своей основе имеет сугубо экономический аспект оптимального планирования распределения ограниченных ресурсов.

Следует особо подчеркнуть, что использование математических методов и моделей актуально как на уровне деятельности фирмы в условиях рынка, так и в макроэкономике — на уровне планирования и анализа аспектов экономической деятельности региона и страны.

Сегодня, в условиях глобализации мировой экономики и становления общества нового типа — информационного общества — математические модели становятся мощным инструментом прогнозов эволюции цивилизации на нашей планете, что позволяет определять оптимальные магистрали развития экономики прежде всего в плане обеспечения жизнедеятельности человека.

Активное использование математического аппарата в экономике основывается на овладении необходимой базой математических знаний. Математические теоремы и доказательства представляют собой строгие логические рассуждения. В этом плане математика является более простой наукой, нежели другие — скажем, науки об обществе: она не допускает множественного трактования; для опровержения какого-либо предположения здесь достаточно привести всего лишь один противоречивый пример. Однако в такой простоте скрыта сила логических построений и умозаключений, которая позволяет оттачивать методику исследований сложных процессов, имеющих место в экономике, обществе и окружающем нас мире.

Изучение математических методов и инструментария экономических исследований позволит будущему специалисту сформировать необходимые компоненты мышления, уровень, кругозор и культуру, которые понадобятся ему как в теоретическом плане, так и в плане ориентации в его профессиональной и практической деятельности.

Предлагаемое учебное пособие написано на основе лекций, прочитанных авторами в течение последних лет в различных экономических вузах, в том числе и в процессе второго высшего образования. В книгу вошли материалы, прошедшие практическую проверку при преподавании цикла математических дисциплин в экономических государственных и негосударственных вузах для различных форм обучения.

Поскольку существенное внимание при обучении в магистратуре экономических вузов сегодня уделяется применению математических методов и экономико-математическому моделированию, в книгу включены соответствующие разделы, дающие достаточно полное представление о наиболее важных аспектах современной экономики.

Учебник состоит из четырех разделов, охватывающих основные пункты блока математических дисциплин, включенных в Государственный образовательный стандарт высшего профессионального образования подготовки магистрантов по направлению «Экономика». Каждый раздел имеет свою степень детальности. Подбор материала осуществлялся в основном по принципу относительной новизны методов и моделей, а также их использования в экономических приложениях.

Каждая глава является самостоятельной. Материал сопровождается разбором большого числа характерных примеров, актуальных задач и соответствующих экономических приложений.

При изложении материала авторы постарались сохранить как сложившуюся терминологию, так и традиционные обозначения в формулировках задач и математических моделей, а также в решениях.

Книга предназначена прежде всего для подготовки магистрантов экономики, имеющих базовое образование по блоку математических и естественнонаучных дисциплин и имеющих представление о применении аппарата математики в экономике. Она также может быть полезна для самой широкой экономической аудитории — научных сотрудников, преподавателей, аспирантов, студентов старших курсов.

РАЗДЕЛ 1

МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ И ТЕОРИИ ИГР

Глава 1

Линейное программирование

Линейное программирование сформировалось как отдельный раздел прикладной математики в 40–50-х гг. XX в. благодаря работам советского ученого, академика, лауреата Ленинской, Государственной и Нобелевской премий Л. В. Канторовича. В 1939 г. им была опубликована работа «Математические методы организации и планирования производства», в которой он с использованием математики решил экономические задачи о наилучшей загрузке машин, раскрое материалов с наименьшими расходами, распределении грузов по нескольким видам транспорта и другие, предложив метод разрешающих множителей.

Л. В. Канторович впервые сформулировал такие в настоящее время широко используемые экономико-математические понятия, как оптимальный план, оптимальное распределение ресурсов, объективно обусловленные оценки, указав многочисленные области экономики, где они могут быть применены.

В последующих работах Л. В. Канторовича, В. С. Немчинова, В. В. Новожилова и других математиков и экономистов получила дальнейшее развитие теория линейного программирования и ее приложения к исследованию экономических проблем.

Методам линейного программирования посвящено много работ зарубежных и, прежде всего, американских ученых. Математик Д. Данциг ввел понятие линейного программирования и предложил в 1949 г. алгоритм решения задачи линейного программирования, получивший название «симплексный метод». Следует отметить работы Форда, Фалкерсона, Куна, Лемке, Гасса, Била и др.

Математическое программирование, в которое входит линейное программирование, в настоящее время является одним из направлений исследования операций. В зависимости от вида решаемых задач в нем выделяют такие области, как линейное, нелинейное, дискретное, динамическое, геометрическое программирование и др. Термин «программирование» введен в связи с тем, что неизвестные переменные, которые находятся в процессе решения задачи, обычно определяют программу или план работы некоторого экономического объекта.

Линейное программирование получило широкое развитие в связи с тем, что было установлено: ряд задач сферы планирования и управления может быть сформулирован в виде задач линейного программирования, для решения которых имеются эффективные методы. По оценкам специалистов примерно 80–85% всех решаемых на практике задач оптимизации относится к задачам линейного программирования.

Созданный математический аппарат в сочетании с компьютерными программами, производящими сложные и трудоемкие расчеты, позволяет широко использовать модели линейного программирования как в экономической науке, так и в хозяйственной деятельности.

1.1. Основные определения и математические модели

Определение 1. *Линейное программирование* (ЛП) — это область математического программирования, являющегося разделом математики и изучающего методы решения экстремальных (наибольших и наименьших) значений линейной функции конечного числа переменных, на неизвестные которой наложены линейные ограничения.

Эта линейная функция называется *целевой*, а ограничения, которые представляют количественные соотношения между переменными, выражающие условия и требования экономической задачи и математически записываются в виде уравнений или неравенств, называются *системой ограничений*.

Определение 2. Математическое выражение целевой функции и ее ограничений называется *математической моделью экономической задачи*.

В общем виде математическая модель задачи линейного программирования записывается как

$$L(\bar{x}) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_j x_j + \ldots + c_n x_n \to \max\ (\min)$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n = b_i, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mj}x_j + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0; \ i = \overline{1, m}; \ j = \overline{1, n},$$

где x_j — неизвестные;

a_{ij}, b_i, c_j — заданные постоянные величины.

Все или некоторые уравнения системы ограничений могут быть записаны также в виде неравенств.

Математическая модель в более краткой записи имеет вид:

$$L(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max\ (\min),$$

при ограничениях:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i;$$

$$x_j \geq 0; \ i = \overline{1, m}; \ j = \overline{1, n}.$$

Для составления математической модели необходимо:

- обозначить переменные;
- составить целевую функцию исходя из цели задачи;
- записать систему ограничений, учитывая имеющие в условии задачи показатели и их количественные закономерности.

Если все ограничения задачи заданы уравнениями и переменные x_j неотрицательные, то модель такого вида называется *канонической*. Если хотя бы одно ограничение является неравенством, то модель — *неканоническая*. Переход от неканонической формы модели к канонической осуществляется введением в каждое неравенство *балансовой переменной* x_{n+i}. При знаке неравенства $\leq$ балансовая переменная вводится в неравенство со знаком плюс, если знак неравенства $\geq$ — со знаком минус. В целевую функцию балансовые переменные не вводятся.

1.2. Некоторые теоремы линейного программирования

1.2.1. Теорема о замене линейного неравенства линейным уравнением и неравенством

Теорема 1.1. Каждому решению $\bar{x}\,(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n)$ неравенства

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \le b \qquad (1.1)$$

соответствует единственное решение $\bar{y}$ $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \alpha_{n+1})$ уравнения

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + x_{n+1} = b \qquad (1.2)$$

и неравенства $x_{n+1} \ge 0$ и наоборот.

Доказательство. Пусть $\bar{x}\,(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n)$ решение неравенства (1.1). Значит справедливо и числовое неравенство:

$$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \ldots + a_n\alpha_n \le b.$$

Обозначим

$$\alpha_{n+1} = b - (a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \ldots + a_n\alpha_n)$$

или

$$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \ldots + a_n\alpha_n + \alpha_{n+1} = b,$$

где $\alpha_{n+1} \ge 0$.

Это означает, что $\bar{y}$ $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \alpha_{n+1})$ — есть решение уравнения (1.2) и неравенства $x_{n+1} \ge 0$.

Таким образом, если система ограничений содержит неравенства, то вводя в каждое неравенство дополнительную переменную x_{n+1}, ее можно преобразовать в систему уравнений. Эту дополнительную переменную x_{n+1} называют *балансовой переменной*.

Отсюда вытекает правило перехода от неканонической модели записи задачи линейного программирования к канонической.

Чтобы перейти от неканонической формы модели к канонической, необходимо ввести в каждое неравенство *балансовую переменную* x_{n+i}. При знаке неравенства $\le$ балансовая переменная вводится в неравенство со знаком плюс, если знак неравенства $\ge$ — со знаком минус. В целевую функцию балансовые переменные не вводятся.

Пример 1. Привести к канонической форме систему ограничений, заданную в неканонической форме:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 \geq 5, \\ x_2 + 2x_3 - x_5 \leq 6, \\ 2x_2 - 3x_4 \geq 4. \end{cases}$$

Решение. Для приведения системы ограничений, заданной в неканонической форме к канонической, введем балансовые переменные: в первое неравенство $(-x_6)$, во второе неравенство x_7, в третье неравенство $(-x_8)$.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 - x_6 = 5, \\ x_2 + 2x_3 - x_5 + x_7 = 6, \\ 2x_2 - 3x_4 - x_8 = 4. \end{cases}$$

$$x_j \geq 0; \quad j = \overline{1,\ 8}.$$

1.2.2. Теорема об экстремуме целевой функции в ограниченной области

Теорема 1.2. Если область допустимых решений (ОДР) системы ограничений задачи линейного программирования замкнутая, ограниченная, то оптимальное решение задачи существует и совпадает хотя бы с одним из опорных решений системы ограничений.

Доказательство. Дана задача линейного программирования, запишем ее в векторной форме:

$$L(\bar{x}) = \bar{c}\,\bar{x} \to \max\ (\min) \tag{1.3}$$

при ограничениях:

$$\sum x_j A_j = b, \quad \bar{x} \geq 0.$$

Для определенности рассмотрим случай, когда $L(\bar{x}) \to \max$. Пусть $L(\bar{x}) \to \max$ достигается при некотором допустимом решении $\bar{x}_{\text{опт}}$, которое не является опорным решением, т. е. не является угловой точкой ОДР. Тогда $\bar{x}_{\text{опт}}$ является внутренней точкой ОДР и ее можно записать в виде выпуклой линейной комбинации опорных решений:

$$\bar{x}_{\text{опт}} = \sum t_i \bar{x}_i, \quad t_i \geq 0, \quad \sum t_i = 1,$$

где x_i — опорные решения системы ограничений;

S — количество опорных решений.

Подставим $\bar{x}_{\text{опт}}$ в выражение (1.3), получим

$$L(\bar{x})_{\max} = L(\bar{x}_{\text{опт}}) = \overline{\ }\,\Sigma t_i \bar{x}_i = \Sigma t_i \bar{c}\,\bar{x}_i = \Sigma t_i L_i, \tag{1.4}$$

где $L_i = \bar{c}\,\bar{x}_i$ — значение целевой функции в опорном решении.

Так как число опорных решений конечно, то выберем из них такое, при котором достигается наибольшее значение целевой функции. Пусть это будет при $i = k$, т. е.

$$L_i \le L_k.$$

Заменим в правой части (1.4) все значения L_i на L_k, получим:

$$L(\bar{x})_{\max} \le \Sigma\, t_i L_k = L_k \Sigma\, t_i = L_k.$$

Это соотношение может выполняться при $L(\bar{x})_{\max} = L_k$, что означает: максимум линейной функции существует и совпадает с одним из опорных решений, что и требовалось доказать.

Аналогично доказывается теорема при $L(\bar{x}) \to \min$.

1.2.3. Теорема об экстремуме целевой функции в неограниченной области

Теорема 1.3. Если ОДР неограниченная, то оптимальное решение существует и совпадает, по крайней мере, с одним из опорных решений в том и только в том случае, когда целевая функция ограничена сверху для задач на максимум или снизу для задач на минимум.

Если условия теоремы не выполняются, то говорят, что целевая функция не ограничена в области допустимых решений.

1.2.4. Теорема об альтернативном оптимуме

Из вышеуказанных теорем следует, что оптимальное решение может совпадать с одним либо с несколькими опорными решениями. В этом случае говорят, что задача линейного программирования имеет *альтернативный оптимум*.

Теорема 1.4. Если оптимальное решение задачи линейного программирования совпадает с несколькими опорными решениями $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_s$, то любое оптимальное решение $\bar{x}_{\text{опт}}$ есть выпуклая линейная комбинация опорных оптимальных решений, т. е.

$$\bar{x}_{\text{опт}} = \Sigma t_i \bar{x}_i, \quad \Sigma t_i = 1, \quad t_i \ge 0 \qquad (1.4\text{А})$$

Доказательство. Для определенности рассмотрим случай, когда $L(\bar{x}) \to$ $\to \max$.

Дана задача:

$$L(\bar{x}) = \bar{c}\,\bar{x} \to \max \qquad (1.5)$$

при ограничениях:

$$\Sigma \bar{x}_j A_j = \bar{b},$$

$$\bar{x}_j \geq 0.$$

Пусть $L(\bar{x})_{\max}$ достигается при нескольких опорных решениях $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, ..., $\bar{x}_i$, ..., $\bar{x}_s$, тогда

$$L(\bar{x})_{\max} = \bar{c}\,\bar{x}_1 = \bar{c}\,\bar{x}_2 = \ldots = \bar{c}\,\bar{x}_i = \ldots = \bar{c}\,\bar{x}_s.$$

Подставим $\bar{x}_{\text{опт}}$ (1.4А) в выражение целевой функции (1.5):

$$L(\bar{x}_{\text{опт}}) = \bar{c}\,\bar{x}_{\text{опт}} = \bar{c}\Sigma t_i \bar{x}_i = \Sigma t_i \bar{c}\,\bar{x}_i = \Sigma t_i L(\bar{x})_{\max} = L(\bar{x})_{\max}.$$

Следовательно, $\bar{x}_{\text{опт}}$, определенное по выражению (1.4А), является оптимальным решением задачи.

Аналогично доказывается теорема, если $L(\bar{x}) \to \min$.

1.3. Графический метод решения задач

1.3.1. Постановка задачи

Наиболее простым и наглядным методом решения задач линейного программирования является графический метод. Он применяется для задач ЛП с двумя переменными, заданными в неканонической форме, и многими переменными в канонической форме при условии, что они содержат не более двух *свободных переменных*.

С геометрической точки зрения в задаче линейного программирования ищется такая угловая точка или набор точек из *допустимого множества решений*, на которой достигается самая верхняя (нижняя) линия уровня, расположенная дальше (ближе) остальных в направлении наискорейшего роста.

Для нахождения экстремального значения целевой функции при графическом решении задач ЛП используют *вектор* $\overline{\text{grad}}\, L$ на плоскости X_1OX_2, который обозначим $\bar{C}$. Этот вектор показывает направление наискорейшего изменения целевой функции, он равен

$$\overline{\text{grad}}\, L = \bar{C} = \frac{\partial L}{\partial x_1}\bar{e}_1 + \frac{\partial L}{\partial x_2}\bar{e}_2,$$

где $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$ — единичные векторы по осям OX_1 и OX_2 соответственно. Таким образом, $\bar{C} = (\partial L/\partial x_1, \partial L/\partial x_2)$. Координатами вектора $\bar{C}$ являются коэффициенты целевой функции $L(\bar{x})$.

1.3.2. Алгоритм решения

Решение задач ЛП графическим методом осуществляется по следующему алгоритму:

1. Находим область допустимых решений системы ограничений задачи.
2. Строим вектор $\overline{C}$.
3. Проводим линию уровня L_0, которая перпендикулярна $\overline{C}$.
4. Линию уровня перемещаем по направлению вектора $\overline{C}$ для задач на максимум и в направлении, противоположном $\overline{C}$, для задач на минимум.

Перемещение линии уровня производится до тех пор, пока у нее окажется только одна общая точка с областью допустимых решений (ОДР). Эта точка определяет единственное решение задачи ЛП и будет точкой *экстремума*.

Если окажется, что линия уровня параллельна одной из сторон ОДР, то задача ЛП будет иметь *бесчисленное множество решений*.

Если ОДР представляет *неограниченную область*, то целевая функция может быть *неограниченна*.

Задача ЛП может быть *неразрешима*, когда определяющие ее ограничения окажутся противоречивыми.

5. Находим координаты точки экстремума и значение целевой функции в ней.

Рассмотрим нахождение оптимального плана выпуска изделий предприятия на следующем примере.

Пример 2. Фирма выпускает два вида мороженого: сливочное и шоколадное. Для изготовления мороженого используются два исходных продукта: молоко и наполнители, расходы которых на 1 кг мороженого и суточные запасы исходных продуктов даны в таблице.

Исходный продукт	Расход исходных продуктов на 1 кг мороженого		Запас, кг
	Сливочное	Шоколадное	
Молоко	0,8	0,5	400
Наполнители	0,4	0,8	365

Изучение рынка сбыта показало, что суточный спрос на сливочное мороженое превышает спрос на шоколадное не более чем на 100 кг.

Кроме того, установлено, что спрос на шоколадное мороженое не превышает 350 кг в сутки. Отпускная цена 1 кг сливочного мороженого 16 ден. ед., шоколадного — 14 ден. ед.

Требуется определить, какое количество мороженого каждого вида должна производить фирма, чтобы доход от реализации продукции был максимальным?

Решение. Обозначим: x_1 — суточный объем выпуска сливочного мороженого, кг; x_2 — суточный объем выпуска шоколадного мороженого, кг.

Составим математическую модель задачи.

Целевая функция будет иметь вид:

$$L(\bar{x}) = 16x_1 + 14x_2 \to \max$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} 0{,}8x_1 + 0{,}5x_2 \le 400, \\ 0{,}4x_1 + 0{,}8x_2 \le 365, \\ x_1 - x_2 \le 100, \\ x_2 \le 350, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

Решим задачу графическим методом, для чего найдем область допустимых решений.

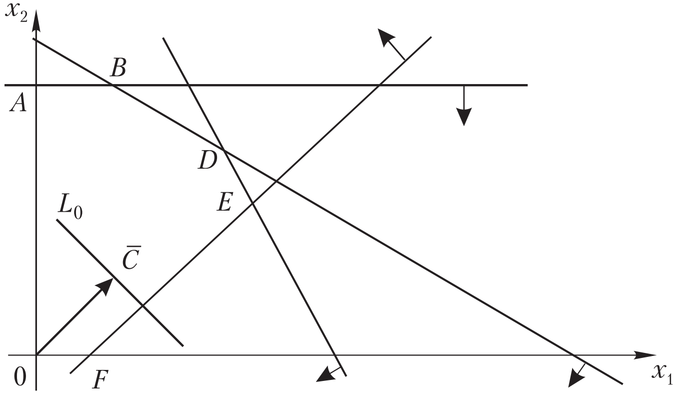


Рис. 1.1

OABDEF — область допустимых решений. Строим вектор $\overline{C}$ (1,1). Линия уровня L_0 имеет уравнение

$$16x_1 + 14x_2 = \text{const}.$$

Перемещаем линию уровня по направлению вектора $\overline{C}$. Точкой выхода L_0 из области допустимых решений является точка D, ее координаты определяются как пересечение прямых, заданных ограничениями:

$$\begin{cases} 0{,}8x_1 + 0{,}5x_2 = 400, \\ 0{,}4x_1 + 0{,}8x_2 = 365. \end{cases}$$

Решая систему, получим координаты точки D (312,5; 300), в которой и будет оптимальное решение, т. е.

$\overline{X}_{\text{опт}} = (312{,}5;\, 300)$ при этом $L(\overline{x})_{\max} = 16 \cdot 312{,}5 + 14 \cdot 300 = 9200$ ден. ед.

Ответ. Максимальный доход от реализации составит 9200 ден. ед. в сутки при выпуске 312,5 кг сливочного и 300 кг шоколадного мороженого.

1.3.3. Экономический анализ задач с использованием графического метода

Проведем экономический анализ рассмотренной выше задачи по производству мороженого.

Математическая модель задачи имеет вид

$$L(\overline{x}) = 16x_1 + 14x_2 \to \max$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} 0{,}8x_1 + 0{,}5x_2 \le 400 \text{ (ограничение по молоку)}, & (1.6) \\ 0{,}4x_1 + 0{,}8x_2 \le 365 \text{ (ограничение по наполнителям)}, & (1.7) \\ x_1 - x_2 \le 100 \text{ (рыночное ограничение по спросу)}, & (1.8) \\ x_2 \le 350 \text{ (рыночное ограничение по спросу)}, & (1.9) \end{cases}$$

$$x_{1,2} \le 0.$$

Согласно найденному оптимальному решению фирме необходимо выпускать в сутки 312,5 кг сливочного и 300 кг шоколадного мороженого, при этом максимально возможный доход составит 9200 ден. ед.

Определим, как влияет на оптимальное решение увеличение или уменьшение запасов исходных продуктов. Для анализа задачи примем, что неравенства системы ограничений могут быть *активными* или *пассивными*. Если прямая проходит через точку, в которой находится оптимальное решение, то будем считать, что она представляет активное ограничение. В противном случае прямая относится к пассивному ограничению.

Если ограничение активное, то будем считать, что соответствующий ресурс является *дефицитным*, так как он используется полностью. Если ограничение пассивное, то ресурс *недефицитный* и имеется в фирме в избытке.

Рассмотрим увеличение ресурса правой части ограничения (1.6) по молоку (рис. 1.2). При перемещении прямой (1.6) параллельно самой себе вправо до пересечения с прямыми (1.7) и (1.8) в точке M, ограничение (1.9) будет оставаться активным. Точку M определим как точку пересечения прямых (1.7) и (1.8):

$$\begin{cases} 0,4x_1 + 0,8x_2 = 365, \\ x_1 - x_2 = 100. \end{cases}$$

Откуда получаем координаты точки M (370,83; 270,3).

Подставляя координаты точки M в неравенство (1.6), получим предельно допустимый суточный запас молока:

$$0,8x_1 + 0,5x_2 = 0,8 \cdot 370,83 + 0,5 \cdot 270,3 = 432,1 \text{ кг},$$

при этом величина дохода составит:

$$L(\bar{x}) = 16 \cdot 370,83 + 14 \cdot 270,3 = 9724,9 \text{ ден. ед.}$$

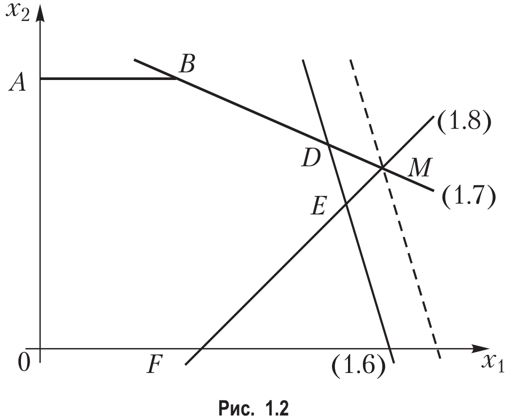


Рис. 1.2

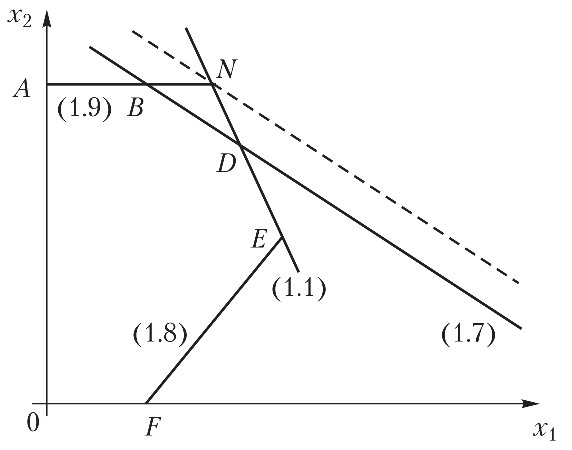


Рис. 1.3

Рассмотрим увеличение ограничения по наполнителям (рис. 1.3). При перемещении прямой (1.7) параллельно самой себе вправо до пересечения с прямыми (1.6) и (1.9) в точке N ограничение (1.7) будет оставаться активным. Точку N определим как точку пересечения прямых:

$$\begin{cases} 0{,}8x_1 + 0{,}5x_2 = 400, \\ x_2 = 350. \end{cases}$$

Откуда координаты точки N (281,25; 350).

Предельно допустимый суточный запас наполнителей можно увеличивать до значения

$$0{,}4x_1 + 0{,}8x_2 = 0{,}4 \cdot 281{,}25 + 0{,}8 \cdot 350 = 392{,}5 \text{ кг},$$

при этом величина дохода составит:

$$L(\bar{x}) = 16 \cdot 281{,}25 + 14 \cdot 350 = 9400 \text{ ден. ед.}$$

Рассмотрим возможность изменений правой части пассивных ограничений (1.8) и (1.9). Не изменяя оптимального решения (рис. 1.4), прямую (1.8) можно перемещать параллельно самой себе вверх до пересечения с точкой D (312,5; 300), т. е. правую часть ограничения (1.8) можно уменьшать до величины

$$312{,}5 - 300 = 12{,}5 \text{ кг}.$$

Прямую (1.8) можно перемещать параллельно самой себе вниз до пересечения с осью $0X_1$ в точке P (500; 0), т. е. правую часть ограничения (1.8) можно увеличивать до 500 кг.

Таким образом, при неизменном оптимальном решении разница в покупательском спросе между сливочным и шоколадным мороженым может изменяться в диапазоне от 12,5 кг до 500 кг.

Аналогично, не изменяя оптимального решения (рис. 1.5), прямую (1.9) можно перемещать параллельно самой себе вверх до пересечения с осью $0X_2$ в точке R (0; 456,25) или вниз до пересечения с прямой (1.7) в точке D (312,5; 300).

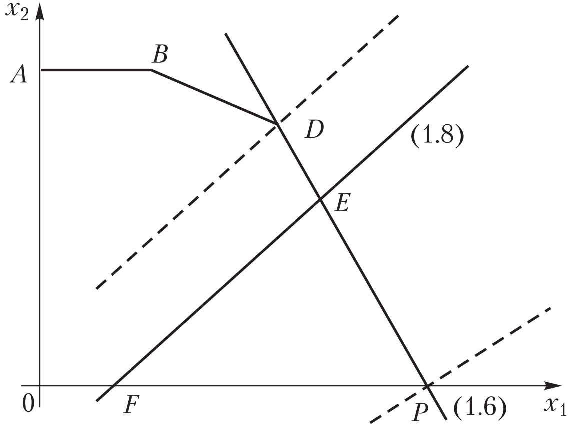


Рис. 1.4

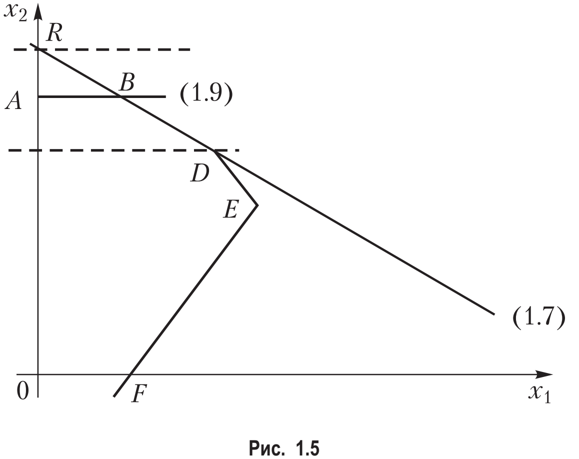


Рис. 1.5

Таким образом, при неизменном оптимальном решении покупательский спрос на шоколадное мороженое может изменяться в диапазоне от 300 кг до 456,25 кг. Проведем анализ задачи по пределам возможного изменения коэффициентов целевой функции, т. е. по диапазону цен на мороженое, при котором не происходит изменения оптимального решения.

Изменение коэффициентов целевой функции оказывает влияние на наклон линии уровня. Уравнение линии уровня записывается в общем виде:

$$c_1x_1 + c_2x_2 = \text{const}.$$

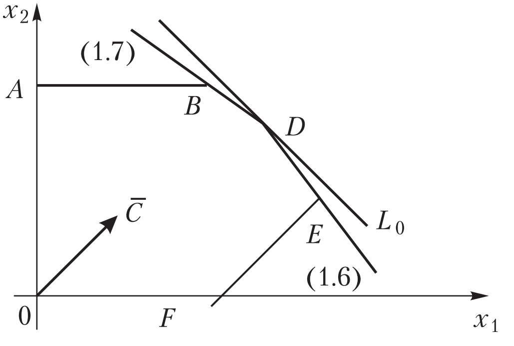


Рис. 1.6

Из рис. 1.6 видно, что при увеличении c_1 или уменьшении c_2 линия уровня вращается вокруг точки D по часовой стрелке. Если по условию задачи $c_2 = 14$, то c_1 можно увеличивать до совпадения линии уровня с прямой (1.6). Угловой коэффициент линии уровня:

$$K = -c_1/c_2 = -c_1/14.$$

Угловой коэффициент прямой (1.6):

$$K_{(1)} = -8/5.$$

Так как прямые совпадают, $K = K_{(1)}$, то $c_{(1)\,\max} = 22{,}4$. Коэффициент $c_{(1)}$ можно уменьшать до совпадения линии уровня с прямой (1.7), поэтому

$$c_{(1)}/14 = 1/2, \quad c_{(1)\,\min} = 7.$$

Таким образом, оптимальное решение задачи не изменится, если отпускная цена 1 кг сливочного мороженого лежит в диапазоне от 7 ден. ед. до 22,4 ден. ед., при этом доход фирмы будет от 6387,5 ден. ед. до 11 200 ден. ед.

Аналогичные рассуждения для случая $c_{(1)} = 16$ позволили сделать вывод, что оптимальное решение задачи не изменится, если цена 1 кг шоколадного мороженого лежит в диапазоне от 10 ден. ед. до 32 ден. ед., при этом доход фирмы будет от 8000 ден. ед. до 14 600 ден. ед.

1.4. Симплексный метод

Симплексный метод является универсальным, так как позволяет решить практически любую задачу линейного программирования, заданную в *каноническом виде*.

Идея симплексного метода (*метода последовательного улучшения плана*) заключается в том, что начиная с некоторого исходного *опорного решения* осуществляется последовательно направленное перемещение по опорным решениям задачи к оптимальному. При этом перемещении значение целевой функции для задач на максимум не убывает. Так как число опорных решений конечно, то через конечное число шагов получим оптимальное опорное решение.

1.4.1. Симплексные таблицы и алгоритм решения задач

Рассмотрим алгоритм решения задач симплексным методом.

1. Математическая модель задачи должна быть *канонической*. Если она *неканоническая*, то ее надо привести к каноническому виду.

2. Находим исходное опорное решение и проверяем его на оптимальность. Для этого заполняем *симплексную таблицу*. Все строки таблицы 1-го шага, за исключением строки D_j (индексная строка), заполняем по данным системы ограничений и целевой функции.

Симплексная таблица имеет следующий вид:

c_i	Базисная переменная (БП)	c_1	c_2	...	c_m	c_{m+1}	...	c_n	$L(\bar{x})$
		x_1	x_2	...	x_m	x_{m+1}	...	x_n	b_i
c_1	x_1	1	0	...	0	$h_{1,m+1}$	...	h_{1n}	f_1
c_2	x_2	0	1	...	0	$h_{2,m+1}$	...	h_{2n}	f_2
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
c_m	x_m	0	0	...	1	$h_{m,m+1}$	...	h_{mn}	f_m
	Δ_j	0	0	...	0	Δ_{m+1}	...	Δ_n	$L(x_1)$

Индексная строка (Δ_j) для переменных находится по формуле

$$\Delta_j = \sum_{i=1}^{m} c_i h_{ij} - c_j, \quad j = \overline{1, n}$$

и по формуле

$$\Delta_j = \sum_{i=1}^{m} c_i f_i \text{ — для свободного члена.}$$

При этом возможны следующие случаи решения задачи на максимум:

- если все оценки $\Delta_j \geq 0$, то найденное решение оптимальное;
- если хотя бы одна оценка $\Delta_j \leq 0$, но при соответствующей переменной нет ни одного положительного коэффициента, решение задачи прекращаем, так как $L(\bar{x}) \to \infty$, т. е. целевая функция не ограничена в *области допустимых решений*;
- если хотя бы одна оценка отрицательная, а при соответствующей переменной есть хотя бы один положительный коэффициент, то нужно перейти к другому опорному решению;
- если отрицательных оценок в *индексной строке* несколько, то в столбец *базисной переменной* (БП) вводят ту переменную, которой соответствует наибольшая по абсолютной величине отрицательная оценка.

Пусть одна оценка $\Delta_k < 0$ или наибольшая по абсолютной величине $\Delta_k < 0$, тогда k-й столбец принимаем за *ключевой*. За *ключевую строку* принимаем ту, которой соответствует минимальное отношение свободных членов (b_i) к положительным коэффициентам k-го столбца. Элемент, находящийся на пересечении ключевых строки и столбца, называют *ключевым элементом*.

3. Заполняем симплексную таблицу 2-го шага:

- переписываем ключевую строку, разделив ее элементы на ключевой элемент;
- заполняем базисные столбцы;
- остальные коэффициенты таблицы находим по правилу «*прямоугольника*». Оценки можно считать по приведенным выше формулам или по правилу «прямоугольника». Получаем новое опорное решение, которое проверяем на оптимальность и т. д.

Примечание 1. 1. Если целевая функция $L(\bar{x})$ требует нахождения минимального значения, то критерием оптимальности задачи является неположительность оценок Δ_j при всех $j = \overline{1, n}$.

2. Правило *«прямоугольника»* состоит в следующем. Пусть ключевым элементом 1-го шага является элемент 1-й строки $(m + 1)$-го столбца $h_{1,\,m+1}$. Тогда элемент i-й строки $(m + 2)$-го столбца 2-го шага, который обозначим $h'_{i,\,m+2}$, по правилу «прямоугольника» определяется по формуле

$$h'_{i,\,m+2} = (h_{1,\,m+1} \cdot h_{i,\,m+2} - h_{i,\,m+1} \cdot h_{1,\,m+2})/h_{1,\,m+1},$$

где $h_{i,\,m+2}$, $h_{i,\,m+1}$, $h_{1,\,m+1}$ — элементы 1-го шага.

1.4.2. Применение симплексного метода в экономических задачах

Рассмотрим применение симплексного метода в экономических задачах на конкретных примерах.

Пример 3. Анализ рекламной деятельности за прошедшие годы показал, что вкладываемые средства приводят к увеличению прибыли: от рекламы на телевидении на C_1 ден. ед., от рекламы на радио – C_2 ден. ед., от рекламы в газетах – C_3 ден. ед., от уличных рекламных щитов – C_4 ден. ед., от расклейки объявлений – C_5 ден. ед. в расчете на 1 ден. ед., затраченную на рекламу.

Фирма может выделить на рекламу B ден. ед. в год, причем на телевизионную рекламу предполагается выделить не более 50%, на радиорекламу — не более 30%, на газеты и уличные рекламные щиты — не более 15% от общей суммы выделенных средств.

Составить математическую модель задачи для определения величин денежных средств, выделяемых фирмой на средства массовой информации для получения максимальной прибыли от рекламы.

Решение. Для составления математической модели задачи обозначим:

x_1 — количество денежных средств, вкладываемых в рекламу на телевидении;

x_2 — количество средств, выделенных на радиорекламу;

x_3 — количество денежных средств, вкладываемых в рекламу через газеты;

x_4 — количество средств, выделенных на уличные рекламные щиты;

x_5 — количество денежных средств, вкладываемых в расклейку объявлений.

Математическая модель задачи примет вид:

$$L(\bar{x}) = C_1x_1 + C_2x_2 + C_3x_3 + C_4x_4 + C_5x_5 \to \max$$

при ограничениях:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \le B,$$
$$x_1 \le 0{,}5\ B,$$
$$x_2 \le 0{,}3\ B,$$
$$x_3 + x_4 \le 0{,}15\ B,$$
$$x_j \le 0,\quad j = 1{,}5.$$

Пример 4. Предприятие располагает тремя производственными ресурсами (сырьем, оборудованием, электроэнергией) и может организовать производство продукции двумя различными способами. Расход ресурсов и амортизация оборудования за один месяц и общий ресурс при каждом способе производства заданы в таблице (в ден. ед.).

Производственный ресурс	Расход ресурсов за 1 месяц при работе		Общий ресурс
	по 1 способу	по 2 способу	
Сырье	1	2	4
Оборудование	1	1	3
Электроэнергия	2	1	8

При первом способе производства предприятие выпускает за один месяц 3 тыс. изделий, при втором — 4 тыс. изделий.

Сколько месяцев должно работать предприятие по каждому из этих способов, чтобы при наличных ресурсах обеспечить максимальный выпуск продукции?

Решение. Обозначим:

x_1 — время работы предприятия по первому способу;

x_2 — время работы предприятия по второму способу.

Математическая модель задачи примет вид:

$$L(\bar{x}) = 3x_1 + 4x_2 \to \max$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 4, \\ x_1 + x_2 \le 3, \\ 2x_1 + x_2 \le 8, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Приведем задачу к каноническому виду:

$$L(\bar{x}) = 3x_1 + 4x_2 \to \max$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 + x_2 + x_4 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + x_5 = 8, \\ x_j \geq 0 \ \ j = \overline{1, 5}. \end{cases}$$

Составляем симплексную таблицу 1-го шага:

c_i	БП	3	4	0	0	0	$L(\bar{x})$
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
0	x_3	1	2	1	0	0	4
0	x_4	1	1	0	1	0	3
0	x_5	2	1	0	0	1	8
Δ_j		–3	–4	0	0	0	0

$$\bar{x}_1 = (0,\ 0,\ 4,\ 3,\ 8), \ \ L(\bar{x}_1) = 0.$$

В индексной строке Δ_j имеются две отрицательные оценки, значит, найденное решение не является оптимальным и его можно улучшить. В качестве ключевого столбца следует принять столбец базисной переменной x_2, а за ключевую строку — строку переменной x_3, где min (4/2, 3/1, 8/1) = min (2, 3, 8) = 2.

Ключевым элементом является «2». Вводим в столбец БП переменную x_2, выводим x_3. Составляем симплексную таблицу 2-го шага:

c_i	БП	3	4	0	0	0	$L(\bar{x})$
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
4	x_2	1/2	1	1/2	0	0	2
0	x_4	1/2	0	–1/2	1	0	1
0	x_5	3/2	0	–1/2	0	1	6
Δ_j		–1	0	2	0	0	8

$$\bar{x}_2 = (0,\ 2,\ 0,\ 1,\ 6), \ \ L(\bar{x}_2) = 8.$$

В индексной строке имеется одна отрицательная оценка. Полученное решение можно улучшить. Ключевым элементом является «1/2». Составляем симплексную таблицу 3-го шага:

c_i	БП	3	4	0	0	0	$L(\bar{x})$
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
4	x_2	0	1	1	–1	0	1
3	x_1	1	0	–1	2	0	2
0	x_5	0	0	1	–3	1	3
Δ_j		0	0	1	2	0	10

Все оценки свободных переменных $\Delta_i \geq 0$, следовательно, найденное опорное решение является оптимальным:

$$\bar{x}_{\text{опт}} = (2,\ 1,\ 0,\ 0,\ 3),\ \ L(\bar{x})_{\max} = 10.$$

Ответ. Максимальный выпуск продукции составит 10 тыс. ед., при этом по первому способу предприятие должно работать два месяца, по второму — один месяц.

1.5. Метод искусственного базиса

1.5.1. Основные понятия

При решении задач симплексным методом необходимо, чтобы модель задачи была канонической и система ограничений была приведена к единичному неотрицательному базису. Встречаются случаи, когда эти преобразования оказываются громоздкими.

Метод искусственного базиса дает возможность решать задачи, приведенные к каноническому виду, без предварительного нахождения опорного решения. Дана задача линейного программирования:

$$L(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,$$

$$x_j \geq 0,\ \ j = \overline{1, n},\ \ i = \overline{1, m}.$$

Из этой задачи составим вспомогательную задачу следующим образом:

1) систему ограничений вспомогательной задачи получаем из системы ограничений исходной, добавляя в каждое ограничение, не со-

держащее базисную переменную, искусственную базисную переменную;

2) целевая функция равна алгебраической сумме искусственных переменных, взятых с коэффициентом (–1);
3) условие неотрицательности распространяется на все переменные, в том числе и искусственные.

1.5.2. Математическая модель задачи

Математическая модель вспомогательной задачи:

$$\tilde{L}(\bar{x}') = \sum_{j=1}^{m} (-x_{n+1}) \to \max$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+1} = b_i,$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n+m}, \quad i = \overline{1, m}.$$

Система ограничений вспомогательной задачи приведена к единичному базису, поэтому она имеет решение:

$$\bar{x}' = (0,\ 0\ \ldots\ 0,\ b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_m),$$

при этом

$$L(\bar{x}) \leq 0.$$

Между оптимальным решением вспомогательной задачи и опорным решением исходной задачи существует зависимость:

1) если $\tilde{L}(\bar{x}') = 0$ достигается при $\bar{x}' = (f_i,\ f_2,\ \ldots,\ f_n,\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 0)$, то $\bar{x} = = (f_1,\ f_2,\ \ldots,\ f_n)$ является исходным опорным решением;
2) если $\max \tilde{L}(\bar{x}') < 0$, то ограничения исходной задачи несовместны.

1.5.3. Применение метода искусственного базиса

Рассмотрим применение метода искусственного базиса на конкретном примере:

Пример 5. $L(\bar{x}) = 4x_1 - 4x_2 + 2x_3 \to \max$

при ограничениях:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 2, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \ j = \overline{1,3}$$

Решение. Составим вспомогательную задачу:

$$\tilde{L}(\bar{x}) = -x_4 - x_5 \to \max$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_5 = 2, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \ j = \overline{1,5}.$$

Решим вспомогательную задачу симплексным методом:

c_i	БП	0	0	0	–1	–1	$\tilde{L}(\bar{x})$
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_{i1}
–1	x_4	2	1	1	1	0	1
–1	x_5	2	–1	2	0	1	2
Δ_j		–4	0	–3	0	0	–3
0		1	1/2	1/2	1/2	0	1/2
–1		0	–2	1	–1	1	1
Δ_j		0	2	–1	2	0	–1
0		1	3/2	0	1	1/2	0
0		0	–2	1	–1	1	1
Δ_j		0	0	0	1	1	0

Решение вспомогательной задачи:

$$\bar{x}'_{\text{опт}} = (0,0,1,0,0), \ \tilde{L}(\bar{x}) = 0,$$

исходное опорное решение данной задачи:

$$\bar{x}_{\text{опт}} = (0,0,1).$$

Проверим это решение на оптимальность:

	БП	4	–4	2	$L(\bar{x})$
		x_1	x_2	x_3	b_1
4	x_1	1	3/2	0	0
2	x_3	0	–2	1	1
Δ_j		0	6	0	2

Ответ. $\bar{x}_{\text{опт}} = (0,0,1), \ L(\bar{x})_{\max} = 2$.

1.6. Двойственные задачи

Каждой задаче линейного программирования можно определенным образом поставить в соответствие другую задачу линейного программирования, которую называют *двойственной* по отношению к данной (исходной) задаче. Исходная и двойственная задачи тесно связаны между собой и образуют *единую пару* двойственных задач.

В зависимости от структуры модели исходной задачи различают *симметричные*, *несимметричные* и *смешанные двойственные задачи*.

1.6.1. Симметричные двойственные задачи

Модель исходной задачи неканоническая, все ограничения — неравенства, переменные x_j неотрицательные.

Дана исходная задача:

$$L(\bar{x}) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n \to \max$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1 & |y_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2 & |y_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m & |y_m, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1, n}, \quad i = \overline{1, m}.$$

Составим математическую модель двойственной задачи следующим образом:

- каждому неравенству системы ограничений исходной задачи приводим в соответствие переменную y_i;
- составляем целевую функцию, коэффициентами которой являются свободные члены системы ограничений исходной задачи;
- составляем систему ограничений. Коэффициенты системы ограничений образуют *транспонированную матрицу коэффициентов* системы ограничений исходной задачи. Знаки неравенств меняются на противоположные. Свободными членами системы ограничений являются коэффициенты целевой функции исходной задачи. Требование максимизации целевой функции заменяется на минимиза-

цию и наоборот. Все переменные двойственной задачи неотрицательные.

Математическая модель двойственной задачи

$$S(\bar{y}) = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \ldots + b_m y_m \to \min$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} a_{11} y_1 + a_{21} y_2 + \ldots + a_{m1} y_m \geq c_1, \\ a_{12} y_1 + a_{22} y_2 + \ldots + a_{m2} y_m \geq c_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{1n} y_1 + a_{2n} y_2 + \ldots + a_{mn} y_m \geq c_n, \end{cases}$$

$$y_i \geq 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}.$$

1.6.2. Несимметричные двойственные задачи

Математическая модель исходной задачи каноническая.

Дана исходная задача:

$$L(\bar{x}) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n \to \max$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n = b_1, & | y_1, \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n = b_2, & | y_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n = b_m, & | y_m \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}.$$

Составим математическую модель двойственной задачи.

Для ее составления пользуются тем же правилом, что и для составления симметричной задачи с учетом следующих особенностей:

- ограничениями двойственной задачи будут неравенства. Если в целевой функции двойственной задачи требуется найти минимум, то знак неравенства $\geq$, если максимум, то $\leq$;
- переменные y_i произвольные по знаку, т. е. могут принимать как положительные, так и отрицательные значения.

Математическая модель двойственной задачи:

$$S(\bar{y}) = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \ldots + b_m y_m \to \min$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m \geq c_1, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{m2}y_m \geq c_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_m \geq c_n, \end{cases}$$

$$y_i \text{ — произвольные по знаку, } i = \overline{1, m}.$$

Совместное рассмотрение пары двойственных задач имеет практическое значение, так как зная оптимальное решение одной задачи, на основании теорем двойственности можно найти оптимальное решение другой, не решая ее.

1.6.3. Смешанные двойственные задачи

Математическая модель исходной задачи имеет условия симметричных и несимметричных задач. При составлении двойственной задачи необходимо выполнять правила симметричных и несимметричных задач.

Приведем основные теоремы двойственности.

Теорема 1.5. Если одна из двойственных задач имеет оптимальное решение, то другая также имеет оптимальное решение, причем для любых оптимальных решений $\bar{x}$ и $\bar{y}$ выполняется равенство

$$L(\bar{x})_{\max} = S(\bar{y})_{\min}.$$

Если одна из двойственных задач *неразрешима* из-за $L(\bar{x})_{\max} \to \infty$ (или $S(\bar{y})_{\min} \to -\infty$), то другая задача не имеет *допустимых решений.*

Теорема 1.6. Для оптимальности допустимых решений x и y пары двойственных задач необходимо и достаточно, чтобы они удовлетворяли системе уравнений:

$$x_{\text{опт } j}\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_{\text{опт } i} - c_j\right) = 0,$$

$$y_{\text{опт } i}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_{\text{опт } j} - b_i\right) = 0.$$

Теорема утверждает, что если в оптимальном решении одной из двойственных задач какая-либо переменная строго больше нуля, то соответствующее ей ограничение в другой двойственной задаче выполняется как *строгое равенство*, и наоборот, если при оптимальном решении одной из двойственных задач какое-либо ограничение выполняется как *строгое неравенство*, то соответствующая ему переменная в оптимальном решении другой задачи равна нулю.

1.6.4. Решение симметричных двойственных задач

Рассмотрим решение задач с использованием теорем двойственности.

Исходная задача

$$L(\bar{x}) = x_1 - x_2 \to \max$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 2/y_1, \\ x_1 - 2x_2 \le 2/y_2, \\ x_1 + x_2 \le 5/y_3, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \ \ x_2 \ge 0.$$

Двойственная задача

$$S(\bar{y}) = 2y_1 + 2y_2 + 5y_3 \to \min$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} -2y_1 + y_2 + y_3 \ge 1/x_1, \\ y_1 - 2y_2 + y_3 \ge -1/x_2, \end{cases}$$

$$y_i \ge 0, \quad i = 1,3.$$

Решим исходную задачу графическим методом, получим

$$\bar{x}_{\text{опт}}(4,1), \text{при этом } L(\bar{x})_{\max} = 3.$$

На основании теоремы 1.5

$$L(\bar{x})_{\max} = S(\bar{y})_{\min} = 3,$$

так как x_1, $x_2 > 0$, по теореме 1.6 систему ограничений двойственной задачи можно записать в виде равенств:

$$\begin{cases} -2y_1 + y_2 + y_3 = 1, \\ y_1 - 2y_2 + y_3 = -1. \end{cases}$$

Подставим $\bar{x}_{\text{опт}}$ в систему ограничений исходной задачи:

$$\begin{cases} -2 \cdot 4 + 1 \le 2, \ \ 9 < 2, \ \ \text{поэтому } y_1 = 0, \\ 4 - 2 \cdot 1 \le 2, \ \ 2 = 2, \ \ \text{отсюда } y_2 > 0, \\ 4 + 1 \le 5, \ \ 5 = 5, \ \ \text{поэтому } y_3 > 0. \end{cases}$$

Тогда система ограничений двойственной задачи примет вид

$$\begin{cases} y_2 + y_3 = 1, \\ -2y + y_3 = -1. \end{cases}$$

Откуда $\bar{y}_{\text{опт}} = (0,\ 2/3,\ 1/3)$, при этом $S(\bar{y})_{\min} = 3$.

Пусть дано решение двойственной задачи $\bar{y}_{\text{опт}} = (0,\ 2/3,\ 1/3)$, $S(\bar{y})_{\min} =$ $= 3$, найдем решение исходной задачи.

По теореме 1.5 $L(\bar{x})_{\max} = S(\bar{y})_{\min} = 3$, так как y_2 и $y_3 > 0$, по теореме 1.6 второе и третье неравенства исходной задачи выполняются как равенства:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 2, \\ x_1 + x_2 = 5. \end{cases}$$

Откуда $\bar{x}_{\text{опт}} = (4{,}1)$, при этом $L(\bar{x})_{\max} = 3$.

Рассмотрим решение задач методом, основанным на *взаимно однозначном соответствии* между переменными: основным переменным исходной задачи соответствуют *балансовые* переменные двойственной и наоборот.

Для этого решим двойственную задачу симплексным методом:

$$S(\bar{y}) = 2y_1 + 2y_2 + 5y_3 \to \max$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} -2y_1 + y_2 + y_3 - y_4 = 1, \\ y_1 - 2y_2 + y_3 - y_5 = 1, \end{cases}$$

$$y_i \geq 0, \quad i = \overline{1{,}5}.$$

Таблица 1.1

b_i	БП	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	c_j
		–2	1	1	–1	0	1
	y_5	1	2	–1	0	1	1
5	y_3	–2	1	1	–1	0	1
0	y_5	–3	3	0	–1	1	2
	Δ_i	–12	3	0	–5	0	5
5	y_3	–1	0	1	–2/3	–1/3	1/3
2	y_2	–1	1	0	–1/3	1/3	2/3
	Δ_i	9	0	0	–4	–1	3

Из таблицы следует, что $\bar{y}_{\text{опт}} = (0,\ 2/3,\ 1/3)$, $S(\bar{y})_{\min} = 3$.

На основании теоремы 1.5:

$$L(\bar{x})_{\max} = S(\bar{y})_{\min} = 3.$$

Решение другой задачи найдем по соответствию между переменными:

	основные переменные	балансовые переменные
исходная задача	x_1; x_2;	x_3; x_4; x_5
двойственная	y_4; y_5;	y_1; y_2 y_3
	балансовые переменные	основные переменные

Значение x_j определяем по последней симплексной таблице в строке Δ_i в соответствующем столбце, причем значения x_j берем по модулю

$$x_1 \to y_4, \qquad x_1 = |\Delta_4| = |-4| = 4,$$
$$x_2 \to y_5, \qquad x_2 = |\Delta_5| = |-1| = 1.$$

Таким образом, решение исходной задачи:

$$\bar{x}_{\text{опт}} = (4{,}1), \text{ при этом } L(\bar{x})_{\max} = 3.$$

Если исходная задача решена симплексным методом, то решение двойственной задачи может быть найдено по формуле

$$Y_{\text{опт}} = C \cdot A^{-1},$$

где C — матрица — строка коэффициентов при *базисных* переменных целевой функции в оптимальном решении исходной задачи;

A^{-1} — обратная матрица для матрицы A, являющейся матрицей коэффициентов базисных переменных системы ограничений исходной задачи в оптимальном решении.

Решим симплексным методом исходную задачу вида

$$L(\bar{x}) = x_1 - x_2 \to \max$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 - 2x_2 + x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + x_5 = 5, \end{cases}$$
$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,5}.$$

Таблица 1.2

c_i	БП	1	–1	0	0	0	$L(\bar{x})$
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
0	x_3	–2	1	1	0	0	2
0	x_4	1	–2	0	1	0	2
0	x_5	1	1	0	0	1	5
	Δ_j	–1	1	0	0	0	0

Продолжение таблицы 1.2

c_i	БП	1	–1	0	0	0	$L(\bar{x})$
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
0	x_3	0	–3	1	2	0	6
1	x_1	1	–2	0	1	0	2
0	x_5	0	3	0	–1	1	3
	Δ_j	0	–1	0	1	0	2
0	x_3	0	0	1	1	1	9
1	x_1	1	0	0	1/3	2/3	4
–1	x_2	0	1	0	–1/3	1/3	1
	Δ_j	0	0	0	2/3	1/3	3

Из таблицы следует, что $\bar{x}_{\text{опт}} = (4{,}1)$, $L(\bar{x})_{\max} = 3$.

$$C = (1\ -1\ 0)_{1\times 3},\quad A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{3\times 3},\ \text{тогда}\ A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & -1/3 & 1/3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Y_{\text{опт}} = C\cdot A^{-1} = (1\ -1\ 0)\begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & -1/3 & 1/3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (0,\ 2/3,\ 1/3).$$

Таким образом, решение двойственной задачи:

$$\bar{y}_{\text{опт}} = (0,\ 2/3,\ 1/3),\ \text{при этом}\ S(\bar{y})_{\min} = 3.$$

1.6.5. Решение несимметричных двойственных задач

Рассмотрим решение задач с использованием теорем двойственности.

Исходная задача

$$L(\bar{x}) = 3x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 \to \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 9 & |\,y_1 \\ x_1 + x_2 - 6x_3 - x_4 = 6 & |\,y_2 \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\quad j = \overline{1,4}.$$

Двойственная задача

$$S(\bar{y}) = 9y_1 + 6y_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 \le 3 & |\,x_1 \\ -2y_1 + y_2 \le 1 & |\,x_2 \\ 3y_1 - 6y_2 \le 3 & |\,x_3 \\ -2y_1 - y_2 \le 1 & |\,x_4 \end{cases}$$

y_1, y_2 — произвольные по знаку.

Решим двойственную задачу графическим методом, получим:

$$\bar{y}_{\text{опт}} = (1/2,\ 2),\ \text{при этом}\ S(\bar{y})_{\max} = 33/2.$$

По теореме 1.5 $L(\bar{x})_{\min} = S(\bar{y})_{\max} = 33/2$.

Подставим $\bar{y}_{\text{опт}}$ в систему ограничений двойственной задачи:

$$\begin{cases} 2\cdot 1/2 + 2 \le 3, & 3 = 3, \\ -2\cdot 1/2 + 2 \le 1, & 1 = 1, \\ 3\cdot 1/2 - 6\cdot 2 \le 3, & -21/2 < 3 \to x_3 = 0, \\ -2\cdot 1/2 - 2 \le 1, & -3 < 1 \to x_4 = 0. \end{cases}$$

Так как $x_3 = x_4 = 0$, то система ограничений исходной задачи примет вид:

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 = 9, \\ x_1 + x_2 = 6. \end{cases}$$

Решая данную систему, получим

$$\bar{x}_{\text{опт}} = (21/4,\ 3/4,\ 0,\ 0), \text{ при этом } L(\bar{x})_{\min} = 33/2.$$

Рассмотрим решение задач с использованием обратной матрицы.

Пусть решение исходной задачи:

$$\bar{x}_{\text{опт}} = (21/4,\ 3/4,\ 0,\ 0), \text{ при этом } L(\bar{x})_{\min} = 33/2.$$

Решение двойственной задачи найдем по формуле

$$Y_{\text{опт}} = C\cdot A^{-1},$$

где $C = (3\ \ 1)$, $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/2 \\ -1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$,

$$Y_{\text{опт}} = (3\ \ 1)\cdot\begin{pmatrix} 1/4 & 1/2 \\ -1/4 & 1/2 \end{pmatrix} = (1/2\ \ 2).$$

Таким образом, $\bar{y}_{\text{опт}} = (1/2,\ 2)$, при этом $S(\bar{y})_{\max} = 33/2$.

1.6.6. Решение смешанных двойственных задач

Смешанные двойственные задачи можно решать с использованием теорем двойственности.

Исходная задача

$$L(\bar{x}) = x_1 - 6x_2 - x_3 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 3 & |\,y_1 \\ 2x_1 + 3x_3 \le 4 & |\,y_2 \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}.$$

Двойственная задача

$$S(\bar{y}) = 3y_1 + 4y_2 \to \min$$

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 \ge 1 & |\,x_1 \\ 3y_1 \ge -6 & |\,x_2 \\ 3y_1 + 3y_2 \ge -1 & |\,x_3 \end{cases}$$

y_1 — произвольная по знаку, $y_2 \ge 0$.

Найдем оптимальное решение двойственной задачи:

$\bar{x}_{\text{опт}} = (1, 0, 2/3)$, при этом $L(\bar{x})_{\max} = 1/3$.

По теореме 1.5:

$$L(\bar{x})_{\max} = S(\bar{y})_{\min} = 1/3.$$

По теореме 1.6, так как $x_1 > 0$, $x_3 > 0$, то 1 и 3 ограничения двойственной задачи выполняются в виде равенств:

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 = 1, \\ 3y_1 + 3y_2 = -1, \end{cases}$$

откуда $y_1 = -5/3$, $y_2 = 4/3$, т. е. $\bar{y}_{\text{о.т}} = (-5/3, 4/3)$.

1.6.7. Применение теории двойственности в экономике

Рассмотрим задачу оптимального использования ресурсов. Математическая модель задачи имеет следующий вид:

$$L(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max$$

при ограничениях:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad | y,$$

$$x_j \ge 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}.$$

Тогда двойственная задача будет иметь вид:

$$S(\bar{y}) = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \min$$

при ограничениях:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j,$$

$$y_i \ge 0, \quad i = \overline{1, m}.$$

Теорема 1.7. Значения переменных y_i в оптимальном решении двойственной задачи представляют собой оценки влияния свободных членов системы ограничений исходной задачи на оптимальное значение ее целевой функции, т. е.

$$y_i = \frac{\partial L_i}{\partial b_i}.$$

Примем $\partial L_i \approx \Delta L_i, \partial b_i = \Delta b_i$, тогда $\Delta L_i \approx y_i \cdot \Delta b_i$.

Для задачи оптимального использования сырья это уравнение показывает, что при изменении i-го ресурса оптимальный доход является линейной функцией от его приращения, причем коэффициентом служит y_i — i-я компонента оптимального решения двойственной задачи.

Если y_i мало, то значительному увеличению i-го ресурса будет соответствовать небольшое увеличение оптимального дохода, и ценность ресурса невелика.

Если $y_i = 0$, то при увеличении i-го ресурса оптимальный доход остается неизменным и ценность этого ресурса равна нулю. В самом деле, сырье, запасы которого превышают потребности в нем, не представляет ценности для производства и его оценку можно принять за ноль.

Если y_i велико, то незначительному увеличению i-го ресурса будет соответствовать существенное увеличение оптимального дохода, и ценность ресурса высока. Уменьшение ресурса ведет к существенному сокращению выпуска продукции.

y_i считают некоторой характеристикой ценности i-го ресурса. В частности, при увеличении i-го ресурса на единицу ($\Delta b_i = 1$) оптимальный доход возрастает на y_i, что позволяет рассматривать y_i как «условную цену», оценку единицы i-го ресурса, объективно обусловленную оценку.

Так как y_i представляет частную производную от оптимального дохода по i-му ресурсу, то y_i характеризует скорость изменения оптимального дохода при изменении i-го ресурса.

С помощью y_i можно определить степень влияния ограничений на значение целевой функции. Предельные значения (нижняя и верхняя граница) ограничений ресурсов, для которых y_i остаются неизменными, определяются по формулам:

$$b_i^{\text{н}} = \min\left(\frac{x_j}{d_{ij}}\right), \quad b_i^{\text{в}} = \max\left(\frac{x_j}{d_{ij}}\right),$$

где x_j — значение переменной в оптимальном решении;

d_{ij} — элементы матрицы $(d_{ij}) = A^{-1}$, обратной матрице базиса оптимального решения, для которой $A = (a_{ij})_{m \times n}$.

Если в план включаются новые виды продукции, то их оценка находится по формуле:

$$\Delta_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_{\text{опт } i} - c_j .$$

Если $\Delta_j < 0$, то новый вид продукции улучшает план. При $\Delta_j > 0$ нецелесообразно включать новый вид продукции.

Рассмотрим применение теории двойственности в экономике на конкретном примере.

Пример 6. Фирма выпускает три вида изделий, располагая при этом сырьем 4 типов: *А*, *Б*, *В*, *Г*, соответственно, в количествах 18, 16, 8 и 6 т. Нормы затрат каждого типа сырья на 1 ед. изделия первого вида составляют, соответственно, 1, 2, 1, 0, второго вида — 2, 1, 1, 1 и третьего вида — 1, 1, 0, 1. Прибыль от реализации 1 ед. изделия первого вида равна 3 ден. ед., второго — 4 ден. ед., третьего — 2 ден. ед. Требуется:

1) составить план производства трех видов, максимизирующих прибыль;
2) определить дефицитность сырья;
3) установить размеры максимальной прибыли при изменении запасов сырья *А* на 6 т, *Б* — на 3 т, *В* — на 2 т, *Г* — на 2 т. Оценить раздельное влияние этих изменений и суммарное их влияние на прибыль;
4) оценить целесообразность введения в план производства фирмы нового вида изделий (четвертого), нормы затрат на 1 ед. которого, соответственно, равны 1, 2, 2, 0, а прибыль составляет 15 ден. ед.

Решение. 1. Обозначим $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$ план производства изделий трех видов, тогда математическая модель задачи примет вид:

$$L(\bar{x}) = 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \to \max$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \le 18, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \le 16, \\ x_1 + x_2 \le 8, \\ x_2 + x_3 \le 6, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,3}.$$

Решаем задачу симплексным методом, при этом последняя таблица будет иметь следующий вид

c_i	БП	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b_i
0	x_4	0	0	0	1	0	–1	–1	4
2	x_3	0	0	1	0	1/2	–1	1/2	3
3	x_1	1	0	0	0	1/2	0	–1/2	5
4	x_2	0	1	0	0	–1/2	1	1/2	3
	Δ_j	0	0	0	0	1/2	2	3/2	33

Из таблицы следует:

$\bar{x}_{\text{опт}} = (5, 3, 3, 4, 0, 0, 0)$, при этом $L(\bar{x})_{\max} = 33$ ден. ед.

Согласно теоремам двойственности

$\bar{y}_{\text{опт}} = (0, 1/2, 2, 3/2, 0, 0, 0)$ при этом $S(\bar{y})_{\min} = 33$ ден. ед.

2. Наиболее дефицитным является сырье типа *В*, для которого двойственная оценка $y_3 = 2$. Менее дефицитно сырье вида *Б*, для которого $y_2 = 1/2$. Совсем недефицитным является сырье *А* ($y_1 = 0$).

С целью определения интервала устойчивости оценок найдем обратную матрицу для матрицы коэффициентов при базисных переменных в оптимальном решении системы ограничений. Базисными переменными в оптимальном решении являются x_1, x_2, x_3, x_4. Матрица коэффициентов при этих переменных в системе ограничений имеет вид

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда обратная матрица для матрицы *А* имеет вид

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -1 & 1/2 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Найдем интервал устойчивости оценок по видам сырья:

$$\Delta b_1^{\text{н}} = \min\left(\frac{x_{\text{опт}\ j}}{d_{1j}}\right) = \min\left(\frac{3}{1/2}\right) = 6,$$

$$\Delta b_1^{\text{в}} = \max\left(\frac{x_{\text{опт}\ j}}{d_{1j}}\right) = \max\left(\frac{4}{-1/2}\right) = 8.$$

Интервал устойчивости оценок по отношению к первому ограничению

$$(b_1 - b_1^{\text{н}};\, b_1 + b_1^{\text{в}}) = (18 - 6;\, 18 + 8) = (12;\, 26).$$

Аналогично определим интервалы устойчивости оценок по отношению к ограничениям остальных видов сырья:

$$\Delta b_2^{\text{н}} = \min\left(\frac{3}{1};\, \frac{4}{1/2}\right) = 3,\quad \Delta b_2^{\text{в}} = \max\left(\frac{3}{-1/2}\right) = 6.$$

$$\Delta b_3^{\text{н}} = \min\left(\frac{3}{1/2};\, \frac{4}{1/2}\right) = 6,\quad \Delta b_3^{\text{в}} = \max\left(\frac{3}{-1}\right) = 3.$$

$$\Delta b_4^{\text{н}} = \min\left(\frac{5}{1}\right) = 5,\quad \Delta b_4^{\text{в}} = \max\left(\frac{3}{-1};\, \frac{4}{-1}\right) = 3.$$

Интервалы устойчивости оценок по отношению ко второму ограничению

$$(16 - 3;\, 16 + 6) = (13;\, 22),$$

к третьему ограничению

$$(8 - 6;\, 8 + 3) = (2;\, 11),$$

к четвертому ограничению

$$(6 - 5;\, 6 + 3) = (1;\, 9).$$

3. Изменения сырья согласно условиям задачи на +6, –3, +2, +2 т приводят к ограничению запаса сырья до 24, 13, 10, 8 т соответственно. Поскольку эти изменения находятся в пределах устойчивости оценок, на что указывают интервалы, раздельное их влияние на прибыль определяется по формуле

$$L_i = y_{\text{опт}\, i} \cdot b_i,$$

тогда

$$L_{1\max} = y_{\text{опт}1} \cdot b_1 = 0 \cdot 6 = 0,$$

$$L_{2\max} = y_{\text{опт}2} \cdot b_2 = 1/2 \cdot (-3) = -3/2,$$

$$L_{3\max} = y_{\text{опт}3} \cdot b_3 = 2 \cdot 2 = 4,$$

$$L_{4\max} = y_{\text{опт}4} \cdot b_4 = 3/2 \cdot 2 = 3.$$

Суммарное влияние на прибыль

$$L_{\max} = L_{1\max} + L_{2\max} + L_{3\max} + L_{4\max} = 0 - 3/2 + 4 + 3 = 11/2 \text{ ден. ед.}$$

Если изменение сырья не находится в пределах устойчивости оценок, то необходимо найти новые условные оценки, т. е. решить задачу симплексным методом с изменением количества сырья соответствующих видов.

4. Для оценки целесообразности введения в план производства фирмы четвертого вида изделий используем формулу

$$\Delta_4 = \sum_{i=1}^{4} a_{ij} y_{\text{опт}\, i} - c_4 = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1/2 + 2 \cdot 2 + 0 \cdot 3/2 - 15 = -10 < 0.$$

Так как прибыль превышает затраты, то введение в план производства четвертого вида изделий целесообразно.

1.7. Транспортная задача

Транспортная задача — одна из распространенных задач линейного программирования. Ее цель — разработка наиболее рациональных путей и способов транспортирования товаров, устранение чрезмерно дальних, встречных, повторных перевозок. Все это сокращает время продвижения товаров, уменьшает затраты предприятий, связанные с осуществлением процессов снабжения сырьем, материалами, топливом, оборудованием и т. д.

В общем виде транспортную задачу можно представить следующим образом: в m пунктах производства A_1, A_2 ... A_m имеется *однородный* груз в количествах, соответственно, a_1, a_2 ... a_m. Этот груз необходимо доставить в n пунктов назначения B_1, B_2 ... B_n в количествах, соответственно, b_1, b_2 ... b_n. Стоимость перевозки 1 ед. груза (*тариф*) из пункта A_i в пункт B_j равна c_{ij} ден. ед.

Требуется составить план перевозок, позволяющий вывезти все грузы, полностью удовлетворить потребителей, и имеющий минимальную стоимость.

В зависимости от соотношения между суммарными запасами груза и суммарными потребностями в нем транспортные задачи могут быть *закрытыми* и *открытыми*.

Определение 3. Если сумма запасов груза равна суммарной потребности в нем, т. е.

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j,$$

то транспортная задача называется закрытой.

Определение 4. Если сумма запасов груза не равна суммарной потребности в нем, т. е.

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j,$$

то транспортная задача называется открытой.

1.7.1. Закрытая транспортная задача

Рассмотрим закрытую транспортную задачу. Обозначим x_{ij} — количество груза, перевозимого из пункта A_i в пункт B_j. Условия закрытой транспортной задачи запишем в распределительную таблицу, которую будем использовать для нахождения решения.

Математическая модель закрытой транспортной задачи имеет вид

$$L(X) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min$$

при ограничениях:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i,$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j,$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}.$$

B_j / A_i	B_1	B_2	...	B_j	...	B_n
	b_1	b_2	...	b_j	...	b_n
$A_1 a_1$	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	...	c_{1j} x_{1j}		c_{1n} x_{1n}
$A_2 a_2$	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	...	c_{2j} x_{2j}	...	c_{2n} x_{2n}
...	...	...	...	...	...	...
$A_i a_i$	c_{i1} x_{i1}	c_{i2} x_{i2}	...	c_{ij} x_{ij}	...	c_{in} x_{in}
...	...	...	...	...	...	...
$A_m a_m$	C_{m1} x_{m1}	C_{m2} x_{m2}	...	c_{mj} x_{mj}	...	c_{mn} x_{mn}

Оптимальным решением задачи является матрица

$$X_{\text{опт}} = (x_{ij})_{m \times n},$$

удовлетворяющая системе ограничений и доставляющая минимум целевой функции. Транспортная задача, как задача линейного программирования, может быть решена симплексным методом, однако наличие большого числа переменных и ограничений делает вычисления громоздкими. Поэтому для решения транспортных задач разработан специальный метод, имеющий те же этапы, что и симплексный метод, а именно:

- нахождение исходного опорного решения;
- проверка этого решения на оптимальность;
- переход от одного опорного решения к другому.

Рассмотрим каждый из этих этапов.

Условия задачи и ее исходное опорное решение будем записывать в распределительную таблицу. Клетки, в которых поместим грузы, называются *занятыми*, им соответствуют базисные переменные опорного решения. Остальные клетки — *незанятые*, или пустые, им соответствуют свободные переменные. В верхнем правом углу каждой клетки будем записывать *тарифы*. Существует несколько способов нахождения исходного опорного решения.

Рассмотрим один из них — *метод минимального тарифа* (элемента). Согласно этому методу грузы распределяются в первую очередь в те клетки, в которых находится *минимальный тариф* перевозок c_{ij}. Далее поставки распределяются в незанятые клетки с наименьшими тарифами с учетом оставшихся запасов у поставщиков и удовлетворения спроса потребителей. Процесс распределения продолжают до тех пор, пока все грузы от поставщиков не будут вывезены, а потребители не будут удовлетворены. При распределении грузов может оказаться, что количество занятых клеток меньше чем $m + n - 1$. В этом случае недостающее их число заполняется клетками с *нулевыми поставками*, такие клетки называют *условно занятыми*.

Нулевые поставки помещают в незанятые клетки с учетом наименьшего тарифа таким образом, чтобы в каждых строке и столбце было не менее чем по одной занятой клетке.

Рассмотрим нахождение исходного опорного решения транспортной задачи на конкретном примере.

Пример 7. На складах A_1, A_2, A_3 имеются запасы продукции в количествах 90, 400, 110 т соответственно. Потребители B_1, B_2, B_3 должны получить эту продукцию в количествах 140, 300, 160 т соответственно. Найти такой вариант прикрепления поставщиков к потребителям, при котором сумма затрат на перевозки была бы минимальной. Расходы по перевозке 1 т продукции заданы матрицей (ден. ед.):

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \\ 3 & 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

Решение. Проверим, является ли данная транспортная задача закрытой.

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = 90 + 400 + 110 = 600 \text{ т},$$

$$\sum_{j=1}^{3} b_j = 140 + 300 + 160 = 600 \text{ т}.$$

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = \sum_{j=1}^{3} b_j,$$

следовательно, данная транспортная задача закрытая. Найдем исходное опорное решение по методу минимального тарифа.

Таблица 1.3

<table>
<tr><td rowspan="2">b_j \ a_i</td><td>1</td><td>2</td><td colspan="2">3</td></tr>
<tr><td>140</td><td>300</td><td colspan="2">160</td></tr>
<tr><td>1</td><td>90</td><td>2
90</td><td>5</td><td>2</td></tr>
<tr><td>2</td><td>400</td><td>4</td><td>1
300</td><td>5
100</td></tr>
<tr><td>3</td><td>110</td><td>3
50</td><td>6</td><td>8
60</td></tr>
</table>

Число занятых клеток в таблице равно 5, $m + n - 1 = 3 + 3 - 1 = 5$, т. е. условие невырожденности выполнено. Получили исходное опорное решение, которое запишем в виде матрицы:

$$X_{\text{опт}1} = \begin{pmatrix} 90 & 0 & 0 \\ 0 & 300 & 100 \\ 50 & 0 & 60 \end{pmatrix}.$$

Стоимость перевозки при исходном опорном решении составляет:

$$L(X_{\text{опт1}}) = 90 \cdot 2 + 300 \cdot 1 + 100 \cdot 5 + 50 \cdot 3 + 60 \cdot 8 = 1610 \text{ ден. ед.}$$

Найденное исходное опорное решение проверяется на оптимальность методом потенциалов по следующему критерию: если опорное решение транспортной задачи является оптимальным, то ему соответствует система $m + n$ действительных чисел u_i и v_j, удовлетворяющих условиям $u_i + v_j = c_{ij}$ для занятых клеток и $u_i + v_j - c_{ij} \le 0$ для свободных клеток.

Числа u_i и v_j называют *потенциалами*. В распределительную таблицу добавляют строку v_j и столбец u_i.

Потенциалы u_i и v_j находят из равенства $u_i + v_j = c_{ij}$, справедливого для занятых клеток. Одному из потенциалов дается произвольное значение, например $u_1 = 0$, тогда остальные потенциалы определяются однозначно. Так, если известен потенциал u_i, то $v_j = c_{ij} - u_i$, если известен потенциал v_j, то $u_i = c_{ij} - v_j$.

Обозначим $\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$, которую называют *оценкой свободных клеток*. Если все оценки свободных клеток $\Delta_{ij} \le 0$, то опорное решение является оптимальным. Если хотя бы одна из оценок $\Delta_{ij} \ge 0$, то опорное решение не является оптимальным и его можно улучшить, перейдя от одного опорного решения к другому.

Проверим найденное опорное решение на оптимальность, добавив в распределительную таблицу столбец u_i и строку v_j.

Таблица 1.4

a_i \ b_j		1	2	3	u_i
		140	300	160	
1	90	2 90	5	2	0
2	400	4	1 300	5 100	–2
3	110	3 50	6	8 60	1
	v_j	2	3	7	

Полагаем $u_1 = 0$, запишем это значение в последнем столбце первой строки таблицы.

Рассмотрим занятую клетку первой строки, которая расположена в первом столбце (1, 1), для нее выполняется условие $u_1 + v_1 = 2$. Откуда при $u_1 = 1$, $v_1 = 2$ это значение запишем в последней строке таблицы. Далее надо рассматривать ту из занятых клеток таблицы, для которых один из потенциалов известен.

Рассмотрим занятую клетку (3, 1): $u_3 + v_1 = 3$, $v_1 = 2$, откуда $u_3 = 1$.

Для клетки (3, 3): $u_3 + v_3 = 8$, $u_3 = 1$, $v_3 = 7$.

Для клетки (2, 3): $u_2 + v_3 = 5$, $v_3 = 7$, $u_2 = -2$.

Для клетки (2, 2): $u_2 + v_2 = 1$, $u_2 = -2$, $v_2 = 3$.

Найденные значения потенциалов заносим в таблицу.

Вычисляем оценки свободных клеток:

$$\Delta_{12} = u_1 + v_2 - c_{12} = 0 + 3 - 5 = -2 < 0,$$

$$\Delta_{13} = u_1 + v_3 - c_{13} = 0 + 7 - 2 = 5 > 0,$$

$$\Delta_{21} = u_2 + v_1 - c_{21} = -2 + 2 - 4 = -4 < 0,$$

$$\Delta_{32} = u_3 + v_2 - c_{32} = 1 + 3 - 6 = -2 < 0.$$

Получили одну оценку $\Delta_{13} = 5 > 0$, следовательно, исходное опорное решение не является оптимальным и его можно улучшить.

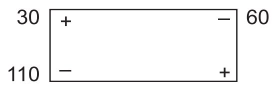
Наличие положительной оценки свободной клетки ($\Delta_{ij} > 0$) при проверке опорного решения на оптимальность свидетельствует о том, что полученное решение не оптимально, и для уменьшения значения целевой функции надо перейти к другому опорному решению. При этом надо перераспределить грузы, перемещая их из занятых клеток в свободные. Свободная клетка становится занятой, а одна из ранее занятых клеток — свободной.

Для свободной клетки, у которой $\Delta_{ij} > 0$ строится цикл (цепь, многоугольник), все вершины которого, кроме одной, находятся в занятых клетках, углы прямые, число вершин четное. Около свободной клетки цикла ставится знак (+), затем поочередно проставляют знаки (–) и (+). У вершин со знаком (–) выбирают минимальный груз, его прибавляют к грузам, стоящим у вершин со знаком (+), и отнимают от грузов у вершин со знаком (–). В результате перераспределения груза получим новое опорное решение. Это решение проверяем на оптимальность, и т. д. до тех пор, пока не получим оптимальное решение.

Рассмотрим переход от одного опорного решения к другому на заданном примере.

Строим цикл для клетки (1, 3), имеющей положительную оценку. У вершин цикла ставим знаки (+) и (−) и записываем грузы.

У вершин со знаком (−) выбираем минимальный груз, он равен 60. Его прибавляем к грузам, стоящим у положительных вершин, и отнимаем от грузов, стоящих у отрицательных вершин. Получаем новый цикл:



Новое опорное решение:

$$X_{\text{опт}2} = \begin{pmatrix} 30 & 0 & 60 \\ 0 & 300 & 100 \\ 110 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Проверим полученное решение на оптимальность. Для этого запишем полученное решение в распределительную таблицу, найдем потенциалы занятых и оценки свободных клеток.

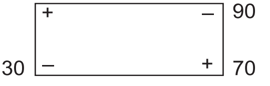
Таблица 1.5

a_i \ b_j		1	2	3	u_i
		140	300	160	
1	90	2 30	5	2 60	0
2	400	4	1 300	5 100	3
3	110	3 110	6	8	2
	v_j	2	−2	2	

$$\Delta_{12} = -7,\ \Delta_{21} = 1 > 0,\ \Delta_{32} = -7,\ \Delta_{33} = -5.$$

Построим цикл для клетки с положительной оценкой $\Delta_{21} = 1$:

Произведем перераспределение грузов:



Получим новое решение, которое занесем в таблицу. Проверим его на оптимальность.

Таблица 1.6

b_j / a_i		1	2	3	u_i
		140	300	160	
1	90	2	5	2 90	0
2	400	4 30	1 300	5 70	3
3	110	3 110	6	8	2
	v_j	2	–2	2	

$$\Delta_{11} = -1,\ \Delta_{12} = -7,\ \Delta_{32} = -6,\ \Delta_{33} = -4.$$

Все оценки свободных клеток отрицательные, следовательно, найденное решение оптимальное.

Ответ.

$$X_{\text{опт}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 90 \\ 30 & 300 & 70 \\ 110 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Стоимость транспортных расходов:

$$L(X)_{\min} = 90 \cdot 2 + 30 \cdot 4 + 300 \cdot 1 + 70 \cdot 5 + 110 \cdot 3 = 1280 \text{ ден. ед.}$$

По сравнению с исходным опорным решением транспортные расходы уменьшились на $1610 - 1280 = 330$ ден. ед.

1.7.2. Вырожденность в транспортных задачах

При решении транспортной задачи может оказаться, что число занятых клеток меньше, чем $m + n - 1$. В этом случае задача имеет вырожденное решение. Для возможного его исключения целесообразно поменять местами поставщиков и потребителей или ввести в свободную клетку с наименьшим тарифом нулевую поставку. Нуль помещают в такую клетку, чтобы в каждой строке и столбце было не менее одной занятой клетки.

Рассмотрим вырожденность в транспортной задаче на примере.

Пример 8. Фирма осуществляет поставку бутылок на четыре завода, занимающихся производством прохладительных напитков. Она имеет три склада, причем на складе 1 находится 6000 бутылок, на складе 2 — 3000 бутылок и на складе 3 — 4000 бутылок. Первому заводу требуется 4000 бутылок, второму заводу — 5000 бутылок, третьему заводу — 1000 бутылок. Матрицей задана стоимость перевозки (ден. ед.) одной бутылки от каждого склада к каждому заводу:

$$\begin{pmatrix} 6 & 4 & 9 & 8 \\ 5 & 3 & 2 & 8 \\ 2 & 3 & 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

Как следует организовать доставку бутылок на заводы, чтобы стоимость перевозки была минимальной?

Решение. Запишем исходные данные в распределительную таблицу, найдем исходное опорное решение по методу минимального тарифа. Число заполненных клеток равно 5, $m + n - 1 = 6$, следовательно, задача является вырожденной.

Для исключения вырожденности необходимо в какую-то клетку ввести нулевую поставку. Такая клетка становится условно занятой, ее целесообразно определить при вычислении потенциалов занятых клеток, она должна иметь наименьший тариф по сравнению с другими клетками, которые могут быть условно занятыми.

Так, для нахождения потенциала u_3 поместим нулевую поставку в клетку (1, 3), после чего представляется возможным вычислить остальные потенциалы.

Таблица 1.7

a_i \ b_j		1	2	3	4	u_i
		4000	5000	1000	3000	
1	6000	6	4 3000	9	8 3000	0
2	3000	5	3 2000	2 1000	8	–1
3	4000	2 4000	3 0	6	8	–1
	v_j	3	4	3	8	

Оценки свободных клеток будут равны:

$$\Delta_{11} = -3,\ \Delta_{13} = -6,\ \Delta_{21} = -3,\ \Delta_{24} = -1,\ \Delta_{33} = -4,\ \Delta_{34} = -1.$$

Все оценки отрицательные, получили оптимальное решение.

Ответ.

$$X_{\text{опт}} = \begin{pmatrix} 0 & 3000 & 0 & 3000 \\ 0 & 2000 & 1000 & 0 \\ 4000 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Стоимость транспортных расходов составит: $L(X_{\text{опт}}) = 28\,000$ ден. ед.

1.7.3. Открытая транспортная задача

При открытой транспортной задаче сумма запасов не совпадает с суммой потребностей, т. е.

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

При этом возможны два варианта:

а) если

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j,$$

то объем запасов превышает объем потребления, все потребители будут удовлетворены полностью и часть запасов останется не вывезенной. Для решения задачи вводят *фиктивного* $(n + 1)$ *потребителя*, потребности которого

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

Модель такой задачи будет иметь вид

$$L(X) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m+1} = a_i, \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = b_j, \end{cases}$$

$$x_{ij} \ge 0, \ \ i = \overline{1, m+1}, \ \ j = \overline{1, n};$$

б) если

$$\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j,$$

то объем потребления превышает объем запасов, часть потребностей останется неудовлетворенной. Для решения задачи вводим *фиктивного* (m + 1) *поставщика*.

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i.$$

Модель такой задачи имеет вид

$$L(X) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} c_{ij} x_{ij} \to \min$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = a_i, \\ \sum_{j=1}^{n+1} x_{ij} = b_j, \end{cases}$$

$$x_{ij} \ge 0, \ \ j = \overline{1, n+1}, \ \ j = \overline{1, n}.$$

При введении фиктивных поставщика или потребителя открытая транспортная задача становится закрытой и решается по ранее рассмотренному алгоритму для закрытых транспортных задач, причем тарифы, соответствующие фиктивным поставщику или потребителю, принимаются больше или равными наибольшему из всех транспортных тарифов, иногда их считают равными нулю. В решении целевой функции фиктивный поставщик или потребитель не учитываются.

Пример 9. Составить оптимальный план перевозки грузов от трех поставщиков с грузами 240, 40, 110 т к четырем потребителям с запросами 90, 190, 40 и 130 т. Стоимости перевозок единицы груза от каждого поставщика к каждому потребителю даны матрицей

$$\begin{pmatrix} 7 & 13 & 9 & 8 \\ 14 & 8 & 7 & 10 \\ 3 & 15 & 20 & 6 \end{pmatrix}.$$

Решение. Запасы грузов у поставщиков: $\sum_{i=1}^{3} a_i = 390$ т.

Запросы потребителей: $\sum_{j=1}^{4} b_j = 450$ т, так как $\sum_{i=1}^{3} a_i < \sum_{j=1}^{4} b_j$, то вводим фиктивного поставщика с грузом: $a_{4ф} = 450 - 390 = 60$ т.

Тариф фиктивного поставщика 4ф примем равным 20 ден. ед.

Таблица 1.8

a_j \ b_j		1	2	3	4	u_i
		90	190	40	130	
1	240	7	13 130	9	8 110	0
2	40	14	8 0	7 40	10	–5
3	110	3 90	15	20	6 20	–2
4ф	60	20 60	20	20	20	7
	v_j	5	13	12	8	

Так как $m + n - 1 = 7$, а число занятых клеток равно 6, то для исключения вырожденности введем в клетку (2, 2) нулевую поставку. Оценки свободных клеток:

$\Delta_{11} = -2$, $\Delta_{13} = 3$, $\Delta_{21} = 14$, $\Delta_{24} = -7$, $\Delta_{32} = -4$, $\Delta_{33} = -10$, $\Delta_{4ф1} = -8$, $\Delta_{4ф3} = -1$, $\Delta_{4ф4} = -5$.

Оценка свободной клетки (1, 3) больше нуля, перераспределим грузы:

Запишем полученное перераспределение грузов в таблицу.

Таблица 1.9

b_j / a_i		1	2	3	4	u_i
		90	190	40	130	
1	240	7	13 90	9 40	8 110	0
2	40	14	8 40	7	10	–5
3	110	3 90	15	20	6 20	–2
4ф	60	20	20 60	20	20	7
v_j		5	13	9	8	

$\Delta_{11} = -2$, $\Delta_{21} = -14$, $\Delta_{23} = -3$, $\Delta_{24} = -7$, $\Delta_{32} = -4$, $\Delta_{33} = -13$, $\Delta_{41} = -7$, $\Delta_{43} = -4$, $\Delta_{44} = -5$.

Таким образом, мы получили оптимальное решение.

Ответ.

$$X_{\text{опт}} = \begin{pmatrix} 0 & 90 & 40 & 110 \\ 0 & 40 & 0 & 0 \\ 90 & 90 & 0 & 20 \end{pmatrix}.$$

Стоимость транспортных расходов составляет: $L(X_{\text{опт}}) = 3120$ ден. ед.

1.7.4. Применение транспортных задач в экономике

Алгоритм и методы решения транспортной задачи могут быть использованы при решении некоторых экономических задач, не имеющих ничего общего с транспортировкой груза. В этом случае величины тарифов c_{ij} имеют различный смысл в зависимости от конкретной экономической задачи. К таким задачам относятся:

- оптимальное закрепление за станками операций по обработке деталей. В них c_{ij} является таким экономическим показателем, как производительность. Задача позволяет определить, сколько времени и на какой операции должен использовать каждый из станков, чтобы обработать максимальное количество деталей. Так как транспортная задача требует нахождения минимума, то значения c_{ij} берутся с отрицательным знаком;
- оптимальные назначения или проблема выбора. Имеется m механизмов, которые могут выполнять n различных работ с производительностью c_{ij}. Задача позволяет определить, какой механизм и на какую работу надо назначить, чтобы добиться максимальной производительности;
- задача о сокращении производства с учетом суммарных расходов на изготовление и транспортировку продукции;
- увеличение производительности автомобильного транспорта за счет минимизации порожнего пробега. Уменьшение порожнего пробега сократит количество автомобилей для перевозок, увеличив их производительность;
- решение задач с помощью метода запрещения перевозок. Используется в том случае, если груз от некоторого поставщика по каким-то причинам не может быть направлен одному из потребителей. Данное ограничение можно учесть, присвоив соответствующей клетке достаточно большое значение стоимости, тем самым в эту клетку не будут производиться перевозки.

Пример 10. На предприятии имеется три группы станков, каждая из которых может выполнять пять операций по обработке деталей (операции могут выполняться в любом порядке). Максимальное время работы каждой группы станков соответственно равно 100, 250, 180 ч. Каждая операция должна выполняться соответственно 100, 120, 70, 130 ч.

Определить, сколько времени и на какую операцию нужно использовать каждую группу станков, чтобы обработать максимальное количество деталей.

Производительность каждой группы станков на каждую операцию задана матрицей

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 11 & 10 & 5 \\ 5 & 10 & 15 & 3 & 2 \\ 4 & 8 & 6 & 12 & 10 \end{pmatrix}.$$

Решение. Воспользуемся алгоритмом решения закрытой транспортной задачи, при этом под тарифом понимаем производительность станков по операциям.

Так как в задаче требуется найти максимум, а согласно алгоритму транспортной задачи находится минимум, тарифы умножим на (–1).

Таблица 1.10

a_i \ b_j		1	2	3	4	5	u_i
		100	120	70	110	130	
1	100	–3 40	–5	–11	–10	–5 60	0
2	250	–5 60	–10 120	–15 70	–3	–2	–2
3	180	–4	–8	–6	–12 110	–10 70	–5
v_j		–3	–8	–13	–7	–5	

Находим потенциалы свободных клеток:

$$\Delta_{12} = -3,\ \Delta_{13} = -2,\ \Delta_{14} = 3,\ \Delta_{24} = -6,\ \Delta_{25} = -5,\ \Delta_{31} = -4,\ \Delta_{32} = -5,\ \Delta_{33} = -12.$$

Так как $\Delta_{14} = 3 > 0$, перераспределив станки, получим:

Полученное перераспределение станков занесем в таблицу.

Таблица 1.11

a_i \ b_j		1	2	3	4	5	u_i
		100	120	70	110	130	
1	100	–3 40	–5	–11	–10 60	–5	0
2	250	–5 60	–10 120	–15 70	–3	–2	–2
3	180	–4	–8	–6	–12 50	–10 130	–2
v_j		–3	–8	–13	–10	–8	

Оценки свободных клеток составляют:

$$\Delta_{12} = -3,\ \Delta_{13} = -2,\ \Delta_{15} = -3,\ \Delta_{24} = -9,\ \Delta_{25} = -8,\ \Delta_{31} = -1,\ \Delta_{32} = -2,\ \Delta_{33} = -9.$$

Найденное решение является оптимальным, так как все оценки свободных клеток отрицательные.

$$X_{\text{опт}} = \begin{pmatrix} 40 & 0 & 0 & 60 & 0 \\ 60 & 120 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 50 & 130 \end{pmatrix}.$$

Ответ. Первой группе станков целесообразно выполнять операции 1 и 4 продолжительностью 40 и 60 ч соответственно, второй группе — операции 1, 2 и 3 продолжительностью 60, 120 и 70 ч соответственно, третьей группе — операции 4 и 5 продолжительностью 50 и 130 ч соответственно, при этом максимальное число обработанных деталей составит 5170 шт.

1.8. Задачи с несколькими целевыми функциями

В рассматриваемых выше задачах линейного программирования математические модели имели одну целевую функцию, для которой находилось максимальное или минимальное значение экономического показателя.

Однако на практике часто требуется найти экстремальные значения нескольких экономических показателей. В этом случае математическая модель имеет несколько целевых функций, причем некоторые из них могут требовать нахождения максимального, а другие — минимального значения.

Поэтому возникает задача нахождения такого компромиссного (субоптимального) решения модели, в котором значения всех рассматриваемых экономических показателей были бы приближены к экстремальным значениям.

Нахождение компромиссного решения относится к многокритериальным задачам оценки оптимальности.

В настоящее время подобные задачи математически недостаточно разработаны и для практической деятельности решаются следующими способами.

1. Производится ранжирование показателей, т. е. расположение их в порядке значимости, важности. Затем приступают к поиску решения, оптимального по наиболее важному из них. Задавшись допустимой величиной изменения первого критерия, ищут решение по второму критерию, наилучшему в полученной области, и т. д. Порядок значимости и допустимые диапазоны выбирают произвольно.
2. Нахождение единого (интегрального) показателя эффективности посредством суммирования произведений имеющихся показателей на «весовые» коэффициенты (коэффициенты важности показателей).
3. Превращение всех целевых функций, кроме одной, в ограничения.

Рассмотрим третий способ.

1.8.1. Математическая модель задачи

Дана математическая модель экономической задачи, в которой две целевые функции и система ограничений линейны. Найдем компромиссное решение по двум показателям, один из которых требует нахождения максимума, а другой — минимума.

$$L_1 = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max,$$

$$L_2 = \sum_{j=1}^{n} d_j x_j \to \min,$$

при ограничениях:

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_j \le b_i, \;\; x_j \ge 0, \;\; i = \overline{1, m}, \;\;\; j = \overline{1, n},$$

где L_1, L_2 — значения целевых функций (экономические показатели), для упрощения записи опущены обозначения аргумента;

a_{ij}, c_j, d_j, b_i — коэффициенты;

x_j — переменные.

Решим задачу по каждому показателю в отдельности и найдем оптимальные значения $L_{1\max}$, $L_{2\min}$.

Проделав преобразования над целевыми функциями, получим математическую модель нахождения компромиссного решения задачи с двумя целевыми функциями:

$$F = x_{n+1} \to \min,$$

при ограничениях:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j + L_{1\max} x_{n+1} \geq L_{1\max},$$

$$\sum_{j=1}^{n} d_j x_j - L_{2\min} x_{n+1} \leq L_{2\min},$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i,$$

где F — целевая функция;

x_{n+1} — наибольшее относительное значение экономических показателей.

Математическая модель будет аналогичной в случае нахождения решения задач, имеющих три и более целевые функции.

1.8.2. Определение оптимального выпуска изделий при многокритериальных экономических показателях

Рассмотрим нахождение компромиссного решения экономической задачи, математическая модель которой имеет три целевые функции.

Пример 11. Фирма выпускает два вида изделий по цене 2 ден. ед. и 3 ден. ед. соответственно. По результатам маркетинговых исследований спрос на изделия второго вида не менее 1 тыс. ед. в год. Для производства изделий используется материал A и B, запасы которого на фирме составляют 18 т и 15 т соответственно.

Для изготовления 1 тыс. изделий норма расхода материала A для изделий 1-го вида составляет 3 т, а для изделий 2-го вида — 5 т. Для изготовления 1 тыс. изделий материала B расходуется: для изделий 1-го вида — 5 т, для изделий 2-го вида — 3 т. Себестоимость изделий 1-го вида — 1 ден. ед., а 2-го вида — 2 ден. ед.

Найти оптимальное решение по производству изделий 1-го и 2-го видов, чтобы прибыль и количество выпускаемых изделий были максимальны, а себестоимость минимальной.

Решение. Обозначим: x_1 — количество изделий 1-го вида в тыс. ед.; x_2 — количество изделий 2-го вида в тыс. ед.

Математическая модель задачи будет иметь вид

$$L_1 = x_1 + x_2 \to \max,$$

$$L_2 = 2x_1 + 3x_2 \to \max,$$

$$L_3 = x_1 + 2x_2 \to \min,$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \le 18, \\ 5x_1 + 3x_2 \le 15, \\ \quad x_2 \ge 1, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Решим задачу по каждой целевой функции в отдельности. Получим:

$$L_1 = x_1 + x_2 \to \max,$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \le 18, \\ 5x_1 + 3x_2 \le 15, \\ \quad x_2 \ge 1, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

$$\bar{x}_{1\text{опт}} = (1{,}31;\ 2{,}81),\ L_{1\max} = 4{,}125.$$

$$L_2 = 2x_1 + 3x_2 \to \max$$

при

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \le 18, \\ 5x_1 + 3x_2 \le 15, \\ \quad x_2 \ge 1, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

$$\bar{x}_{2\text{опт}} = (1{,}31;\ 2{,}81),\ L_{2\max} = 11{,}063.$$

$$\bar{x}_{3\text{опт}} = (0;\ 1),$$

$$L_{3\min} = 2{,}0.$$

Математическая модель задачи нахождения компромиссного решения:

$$F = x_3 \to \min$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 4{,}125x_3 \ge 4{,}125, \\ 2x_1 + 3x_2 + 11{,}063x_3 \ge 11{,}063, \\ 5x_1 + 3x_2 \le 15, \\ x_2 \ge 1, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0.$$

Решая задачу с использованием компьютерной программы, получим:

$$\bar{x}_{\text{комп.}} = (1{,}07;\ 1).$$

Ответ. Прибыль будет максимальной, а себестоимость минимальной, если фирма будет выпускать 1,07 тыс. изделий 1-го вида и 1 тыс. изделий 2-го вида.

1.9. Параметрическое линейное программирование

Общая задача программирования имеет вид

$$L(\bar{x}) = \sum c_j x_j \to \max(\min)$$

при ограничениях:

$$\sum a_{ij} x_j = b_i,$$

$$x_j \ge 0,\ i = \overline{1, m},\ j = \overline{1, n},$$

где c_j, a_{ij}, b_i — постоянные величины.

Однако на практике часто встречаются с тем, что эти величины изменяются в некоторых интервалах.

Кроме того, определив оптимальное решение экономической задачи при заданных c_j, a_{ij}, и b_i, целесообразно знать, в каких допустимых пределах можно их менять, чтобы решение оставалось оптимальным.

Поэтому возникает необходимость исследовать поведение оптимального решения задачи линейного программирования в зависимости от изменения коэффициентов ее целевой функции, системы ограничений, коэффициентов целевой функции и системы ограничений.

1.9.1. Линейное программирование с параметром в целевой функции

Пусть коэффициент c_j целевой функции изменяется в пределах ($c_j - c'_j$, $c_j + c'_j$), тогда для удобства решения задачи его можно заменить выражением

$$c_j(\lambda) = c'_j + 2c''_j,$$

где c'_j, c''_j — постоянные;

λ — параметр, который изменяется в некоторых пределах (в общем случае от $-\infty$ до ∞).

В общем виде задача линейного программирования с параметром в целевой функции записывается:

$$L(\bar{x}) = \sum (c'_j + \lambda c''_j) x_j \to \max(\min) \qquad (1.10)$$

при ограничениях

$$\sum a_{ij} x_j = b_i, \qquad (1.11)$$

$$x_j \geq 0,\ i = \overline{1, m},\ j = \overline{1, n},$$

Для каждого значения λ в промежутке $\delta \leq \lambda \leq \varphi$, где δ и φ — произвольные действительные числа, найти $\bar{x}$ (x_1, x_2, ..., x_n), удовлетворяющий системе ограничений и обращающий в максимум (минимум) целевую функцию.

Решая задачу на максимум симплексным методом и исследуя ее решение в зависимости от параметра λ, получим выражения для определения нижнего (λ_1) и верхнего (λ_2) его значений:

$$\lambda_1 = \begin{cases} \max(-\Delta'_j/\Delta''_j), \text{ если существует хотя бы одно } \Delta''_j > 0, \\ -\infty, \text{ если все} \end{cases}$$

$$\Delta''_j \leq 0. \qquad (1.12)$$

$$\lambda_2 = \begin{cases} \min(-\Delta'_j/\Delta''_j), \text{ если существует хотя бы одно } \Delta''_j < 0, \\ \infty, \text{ если все } \Delta''_j \geq 0, \end{cases}$$

где Δ''_j — оценка симплексной таблицы, содержащая параметр λ;

Δ'_j — оценка симплексной таблицы, не содержащая параметр λ.

Если для целевой функции находится минимум, то границы изменения λ (λ_1 и λ_2) определяются:

$$\lambda_1 = \begin{cases} \max\left(-\Delta'_j/\Delta''_j\right), \text{ если существует хотя бы одно } \Delta''_j < 0, \\ \\ \infty, \text{ если все } \Delta''_j \geq 0. \end{cases} \tag{1.13}$$

$$\lambda_2 = \begin{cases} \min\left(-\Delta'_j/\Delta''_j\right), \text{ если существует хотя бы одно } \Delta''_j > 0, \\ \\ \infty, \text{ если все } \Delta''_j \leq 0. \end{cases}$$

Алгоритм решения задачи:

1. Задачу решаем симплекс-методом при конкретном значении параметра λ до получения оптимального решения.
2. Вычисляем значения параметров λ_1 и $\lambda_{2.}$
3. Определяем множество значений параметра λ, для которых полученное решение является оптимальным.
4. В случае необходимости в базис вводим вектор, соответствующий столбцу, из которого определялось значение параметра λ_2.
5. Выбираем ключевую строку и ключевой элемент.
6. Определяем новое оптимальное решение.
7. Находим новое множество значений λ, для которых решение останется оптимальным.
8. Процесс вычисления повторяем до тех пор, пока весь отрезок $[\delta, \varphi]$ не будет исследован.

Пусть

$$L(\bar{x}) = \sum \left(c'_j + \lambda c''_j\right) x_j \to \max.$$

Многоугольник $0ABDEF$ — область допустимых решений (рис. 1.7). При $\lambda = 0$ строим вектор $\overline{C}$ и, перемещая линия уровня MN по направлению вектора $\overline{C}$, получим в точке D оптимальное решение. $\bar{x}(D)$ — оптимальное решение, при котором $L(\bar{x}(D))_{\max}$. При различных значениях λ линия уровня $M'N'$ будет определенным образом поворачиваться вокруг точки D.

Пусть при $\lambda = \lambda_1$ прямая $M'N'$ проходит через сторону BD многоугольника допустимых решений, а при $\lambda = \lambda_2$ проходит через сторону DE.

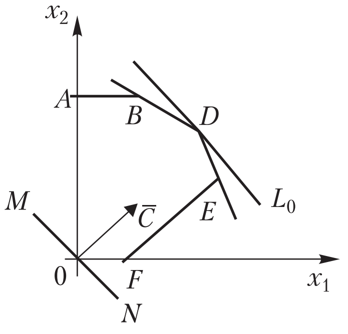


Рис. 1.7

Тогда значения $\overline{x}(D)_{\text{опт}}$ и $L(\overline{x}(D))_{\max}$ не изменяется до тех пор, пока $\lambda_1 \le \lambda \le \lambda_2$. Такая картина будет повторяться до получения нового оптимального решения, соответствующего новой целевой функции, для которой существует свой диапазон изменения λ.

Рассмотрим применение линейного программирования с параметром в целевой функции на примере.

Пример 12. Предприятие должно выпустить два вида продукции A и B, для изготовления которых используются три вида сырья. Нормы расхода сырья каждого вида на производство единицы данного вида продукции приведены в таблице. В ней указаны запасы сырья каждого вида, которое может быть использовано на производство единицы продукции данного вида. Известно, что цена единицы продукции может изменяться для изделия A от 2 до 12 ден. ед., а для изделия B — от 13 до 3 ден. ед., причем эти изменения определяются соотношениями $2 + \lambda$ и $13 - \lambda$, где $0 \le \lambda \le 10$.

Для каждого из возможных значений цены единицы продукции данного вида найти такой план производства, при котором общая стоимость продукции является максимальной.

Вид сырья	Нормы расхода сырья на 1 ед. продукции, т		Запасы сырья, т
	A	B	
1	4	1	16
2	2	2	22
3	6	3	36

Решение. Обозначим: x_1 — количество единиц продукции A; x_2 — количество единиц продукции B. Математическая модель задачи:

$$L(\bar{x}) = (2+\lambda)\,x_1 + (13-\lambda)\,x_2 \to \max \qquad (1.14)$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 \le 16, & (1.15) \\ 2x_1 + 2x_2 \le 22, & (1.16) \\ 6x_1 + 3x_2 \le 36, & (1.17) \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\, j = \in [0{,}10].$$

Область допустимых решений — многоугольник $0ABCD$ (рис. 1.8). Полагая $\lambda = 0$, $L(\bar{x}) = 2x_1 + 13x_2$, строим $\overline{C}$ (2, 13). Перемещая линию уровня по направлению $\overline{C}$, находим, что в точке A (0, 11) задача имеет оптимальное решение. Таким образом, при $\lambda = 0$, $x_{1опт}$, $L(\bar{x})_{\max} = 143$.

Если уравнение прямой имеет вид

$$Ax_1 + Bx_2 + C = 0,$$

то угловой коэффициент прямой равен $k = -\,A/B$.

Угловой коэффициент линии уровня, перпендикулярный $\overline{C}$, при произвольном значении λ равен $k = (2+\lambda)/(13-\lambda)$.

Найдем область оптимальности $\bar{x}_{1опт}$: $\bar{x}_{1опт}$ будет оставаться оптимальным для всех λ, при которых соответствующая линия уровня находится внутри угла, образованного прямыми $x_1 = 0$ и (1.16).

Угловой коэффициент прямой (1.16) $k = -2/2 = -1$. По условию $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = (2+\lambda)/(13-\lambda) = -1$, откуда $\lambda_2 = 11/2$. x_1 остается оптимальным при $\lambda \in [0{,}11/2]$.

При $\lambda = 11/2$ линия уровня совпадает с прямой (1.16) и оптимальными будут все точки, лежащие на прямой (1.16), в том числе и точка B (1, 10), лежащая на пересечении прямых (1.16) и (1.17).

Оптимальное решение будет сохраняться до тех пор, пока при изменении λ линия уровня не совпадает с прямой (1.17), что будет соответствовать новому оптимальному решению $\bar{x}_{2опт}$.

Найдем новый диапазон изменения λ: $\lambda_1 = 11/2$, $\lambda_2 = (-2+\lambda)/(13 - \lambda) = -2$. Откуда $\lambda_2 = 8$.

Таким образом получили $\lambda \in [11/2, 8]$, $\bar{x}_{2опт} = (1, 10)$, $L(\bar{x}_2)_{\max} = 132 - 9\lambda$.

Аналогично определяем, что при $\lambda \in [2, 8]$, $\bar{x}_{2опт} = (2, 8)$, $L(\bar{x}_3)_{\max} = 108 - 6\lambda$.

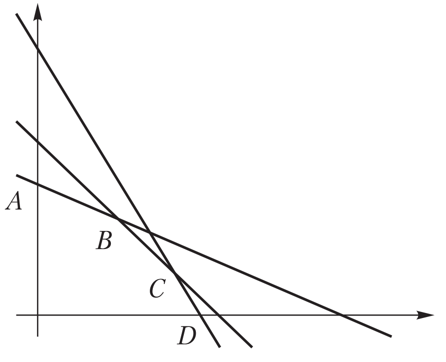


Рис. 1.8

Ответ. При $\lambda = [0, 11/2]$ необходимо производить 11 изделий *B*, при этом стоимость продукции будет максимальной и равной $(143 - 11\lambda)$ ден. ед.; при $\lambda \in [11/2, 8]$ необходимо производить одно изделие *A* и 10 изделий *B*, при этом стоимость продукции является максимальной и равной $(132 - 9\lambda)$ ден. ед.; при $\lambda \in [8, 10]$ необходимо производить 2 изделия *A* и 8 изделий *B*, при этом стоимость продукции будет максимальной и равной $(108 - 6\lambda)$ ден. ед.

Найдем решение этой же задачи симплексным методом, для чего приведем задачу к каноническому виду:

$$L(\bar{x}) = (2 + \lambda)x_1 + (13 - \lambda)x_2 \to \max$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + x_3 = 16, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_4 = 22, \\ 6x_1 + 3x_2 + x_5 = 36, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,5}.$$

c_i	БП	$2+\lambda$	$13-\lambda$	0	0	0	b_i
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_3	4	1	1	0	0	16
0	x_4	2	2	0	1	0	22
0	x_5	6	3	0	0	1	36
	Δ_i	$-2-\lambda$	$-13+\lambda$	0	0	0	0
0	x_3	3	0	1	$-1/2$	0	5
$13-\lambda$	x_2	1	1	0	$1/2$	0	11
0	x_5	3	0	0	$-3/2$	1	3
	Δ_i	$11-2\lambda$	0	0	$31/2-\lambda/2$	0	$143-11\lambda$

$\lambda_1 = -\infty$, так как все $\Delta''_j \le 0$,

$$\lambda_2 = \{-11/-2,\ -13\cdot 2/2\cdot(-1)\} = \min\{11/2,\ 13\} = 11/2.$$

Таким образом, $\lambda \in [0, 11/2]$, $\bar{x}_{1\text{опт}} = (0, 11, 5, 0, 3)$, $L(x_1)_{\max} = 143 - 11\lambda$.

c_i	БП	$2+\lambda$	$13-\lambda$	0	0	0	b_i
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_3	0	0	1	1	-1	2
$13-\lambda$	x_2	0	1	0	1	$-1/3$	10
$2+\lambda$	x_1	1	0	0	$-1/2$	$-1/3$	1
	Δ_i	0	0	0	$12-3\lambda/2$	$-11/3+2\lambda/3$	$132-9\lambda$

$$\lambda_1 = (-11)\cdot 3/3\cdot 2 = 11/2,\ \lambda_2 = -12\cdot 2/(-3) = 8.$$

Таким образом, $\lambda \in [11/2, 8]$, $\bar{x}_{2\text{опт}} = (1, 10, 2, 0, 0)$, $L(\bar{x}_2)_{\max} = 132 - 9\lambda$.

c_i	БП	$2+\lambda$	$13-\lambda$	0	0	0	b_i
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_4	0	0	1	1	-1	2
$13-\lambda$	x_2	0	1	-1	0	$2/3$	18
$2+\lambda$	x_1	1	0	$1/2$	0	$-1/6$	2
	Δ_i	0	0	$-12+3\lambda/2$	0	$-25/3-5\lambda/6$	$108-6\lambda$

$$\lambda_1 = (-12)\cdot 2/3 = 8,\ \lambda_2 = (-25)\cdot(-6/3)\cdot 1/5 = 10.$$

Таким образом, $\lambda \in [8, 10]$, $\bar{x}_{3\text{опт}} = (2, 8, 0, 2, 0)$, $L(\bar{x}_3)\max = 108 - 6\lambda$.

Ответ. Получили следующие оптимальные решения в зависимости от изменения диапазона изменения λ:

$$\lambda \in [0,\ 11/2],\ x_{1\text{опт}} = (0,\ 11,\ 5,\ 0,\ 3),\ L(\bar{x}_1)_{\max} = 143 - 11\lambda;$$

$$\lambda \in [11/2,\ 8],\ x_{2\text{опт}} = (1,\ 10,\ 2,\ 0,\ 0),\ L(\bar{x}_2)_{\max} = 132 - 9\lambda;$$

$$\lambda \in [8,\ 10],\ x_{3\text{опт}} = (2,\ 8,\ 0,\ 2,\ 0),\ L(\bar{x}_3)_{\max} = 108 - 6\lambda.$$

1.9.2. Линейное программирование с параметром в правых частях системы ограничений

В общем виде задача параметрического программирования с параметром в правых частях системы ограничений записывается следующим образом:

$$L(\bar{x}) = \sum c_j x_j \to \max(\min)$$

при ограничениях:

$$\sum a_{ij} x_j = b_i' + \lambda b_i''$$

$$x_j \geq 0,\quad i = \overline{1, m},\quad j = \overline{1, n}.$$

При решении задачи симплексным методом необходимо исходить из условия, что справедливо неравенство

$$b_i' + \lambda_i'' \geq 0,$$

или руководствоваться формулами (1.11) и (1.12).

Пример 13. $L(\bar{x}) = 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 4x_5 \to \max$

при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 12 + \lambda, \\ 2x_1 - x_2 + x_4 = 8 + \lambda, \\ -2x_1 + 2x_2 + x_5 = 10 - 6\lambda, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0,\quad j = \overline{1,5},\quad \lambda \in (-\infty;\ \infty).$$

Решение.

c_i	БП	3	–2	5	0	–4	b_i
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
5	x_3	1	1	1	0	0	$12 + \lambda$
0	x_4	2	–1	0	1	0	$8 + \lambda$
–4	x_5	–2	2	0	0	1	$10 - 6 + \lambda$
	Δ_i	10	–1	0	0	0	$20 + 29\lambda$

c_i	БП	3	−2	5	0	−4	b_i
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
5	x_3	2	0	1	0	−1/2	$7 + 4\lambda$
0	x_4	1	0	0	1	1/2	$13 - 2\lambda$
−2	x_2	−1	1	0	0	1/2	$5 - 3\lambda$
	Δ_i	9	0	0	0	1/2	$25 + 26\lambda$

$$\bar{x}_{1\text{опт}} = (0;\ 5 - 3\lambda;\ 7 + 4\lambda;\ 13 - 2\lambda;\ 0).$$

Решение будет оптимальным, если все $b_i' + \lambda b_i'' \geq 0$;

$$\begin{cases} 7 + 4\lambda \geq 0, \\ 13 - 2\lambda \geq 0, \\ 5 - 3\lambda \geq 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda \geq -7/4, \\ \lambda \leq 13/2, \\ \lambda \geq 5/3. \end{cases}$$

При $\lambda \in [-7/4,\ 5/3]$, $L(\bar{x}_1)_{\max} = 25 + 26\lambda$.

Исследуем, имеются ли оптимальные решения при $\lambda > 5/3$.

Если $5 - 3\lambda < 0$, то, поменяв знаки в третьей строке, можно улучшить решение, введя в столбец БП переменную x_1 вместо x_2.

c_i	БП	3	−2	5	0	−4	b_i
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
5	x_3	0	2	1	0	1/2	$17 - 2\lambda$
0	x_4	0	1	0	1	1	$18 - 5\lambda$
3	x_1	1	−1	0	0	−1/2	$-5 + 3\lambda$
	Δ_i	0	9	0	0	5	$70 - \lambda$

$$\bar{x}_{1\text{опт}} = (-5 + 3\lambda;\ 0;\ 17 - 2\lambda;\ 18 - 5\lambda;\ 0).$$

Решение будет оптимальным, если все решения при $b_i' + \lambda b_i'' \geq 0$;

$$\begin{cases} 17 - 2\lambda \geq 0, \\ 18 - 5\lambda \geq 0, \\ -5 + 3\lambda \geq 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda \geq 17/2, \\ \lambda \leq 18/5, \\ \lambda \geq 5/3. \end{cases}$$

При $\lambda \in [5/3,\ 18/5]$, $L(\bar{x}_2)_{\max} = 70 - \lambda$.

Исследуем, имеются ли оптимальные решения при $\lambda > 17/2$.

При $17 - 2\lambda < 0$ поменяем знаки в первой строке. Так как среди элементов первой строки нет положительных значений, при $\lambda > 17/2$ задача неразрешима.

Исследуем, имеются ли оптимальные решения при $\lambda < -7/4$.

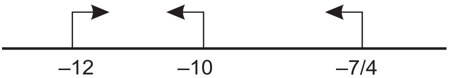
Если $7 + 4\lambda < 0$, то поменяв знаки в первой строке 2-го шага, можно улучшить решение, введя в столбец БП x_5 вместо x_3.

c_i	БП	3	–2	5	0	–4	b_i
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
–4	x_5	–4	0	–2	0	1	$-14 - 8\lambda$
0	x_4	3	0	1	1	0	$20 + 2\lambda$
–2	x_2	1	1	1	0	0	$12 + \lambda$
	Δ_i	11	0	1	0	0	$32 + 30\lambda$

$$\bar{x}_{3\text{опт}} = (0;\ 12 + \lambda;\ 0;\ 20 + 2\lambda;\ -14 - 8\lambda).$$

Решение будет оптимальным, если:

$$\begin{cases} -14 - 8\lambda \ge 0, \\ 20 + 2\lambda \ge 0, \\ 12 + \lambda \ge 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda \le -7/4, \\ \lambda \ge -10, \\ \lambda \ge= 12. \end{cases}$$



При $\lambda \in [-10;\ -7/4]$, $L(\bar{x}_3)_{\max} = 32 + 30\lambda$.

Из таблицы следует, что при $\lambda < -4$ задача неразрешима, так как во второй строке все коэффициенты положительны.

1.9.3. Транспортная параметрическая задача

Задача формулируется следующим образом: для всех значений параметра $\delta \le \lambda \le \varphi$, где δ, φ — произвольные действительные числа, найти такие значения x_{ij} $(i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n})$, которые обращают в минимум функцию

$$L(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} (c'_{ij} + \lambda c''_{ij})$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{m} x_{ij} = a_i, \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = b_j, \end{cases}$$

$$x_{ij} \ge 0,\ i = \overline{1, m},\ j = \overline{1, n}.$$

Пользуясь методом потенциалов, решаем задачу при $\lambda = \delta$ до получения оптимального решения. Признаком оптимальности являются условия:

$u_i + v_j - (c'_{ij} + \delta c''_{ij}) \le 0$ для незанятых клеток,

$u_i + v_j = c'_{ij} + \delta c''_{ij}$ для занятых клеток,

где u_i, v_j — потенциалы строк, столбцов распределительной таблицы.

Условие совместимости транспортной задачи запишется в виде

$$\alpha_{ij} + \lambda \beta_{ij} \le 0.$$

Значения α_{ij} и β_{ij} определяются из условия

$$\begin{cases} \alpha_{ij} = u'_i + v'_j - c'_{ij}, \\ \beta_{ij} = u''_i + v''_j - c''_{ij}, \end{cases}$$

где $u'_i,\ v'_i,\ u''_j,\ v''_j$ определяются из систем уравнений

$$\begin{cases} u'_i + v'_i = c'_{ij}, \\ u''_j + v''_j = c''_{ij}. \end{cases}$$

Значения λ находятся в пределах $\lambda_1 \le \lambda \le \lambda_2$:

$$\lambda_1 = \begin{cases} \max(-\alpha_{ij}/\beta_{ij}),\ \text{если существует хотя бы одно}\ \beta_{ij} < 0, \\ \infty,\ \text{если все}\ \beta_{ij} \ge 0, \end{cases}$$

$$\lambda_2 = \begin{cases} \min(-\alpha_{ij}/\beta_{ij}),\ \text{если существует хотя бы одно}\ \beta_{ij} > 0, \\ \infty,\ \text{если все}\ \beta_{ij} \le 0. \end{cases}$$

Алгоритм решения задачи:

1. Задачу решаем при конкретном значении параметра $\lambda = \delta$ до получения оптимального решения.
2. Определяем α_{ij} и β_{ij}.
3. Вычисляем значения параметра λ.
4. Если $\lambda < \varphi$, производим перераспределение поставок и получаем новое оптимальное решение. Если $\lambda = \varphi$, то процесс решения окончен.

Рассмотрим применение транспортной параметрической задачи на конкретном примере.

Пример 14. Имеются три поставщика однородного товара с объемами поставок: $a_1 = 100$ т, $a_2 = 200$ т, $a_3 = 100$ т, и четыре потребителя с объемами потребления $b_1 = 80$ т, $b_2 = 120$ т, $b_3 = 150$ т, $b_4 = 50$ т. Стоимость транспортных расходов изменяется в определенном диапазоне в зависимости от загрузки дороги, и задана матрицей

$$\begin{pmatrix} \text{от 5 до 11} & \text{от 1 до 4} & 8 & \text{от 3 до 6} \\ 4 & 7 & \text{от 4 до 10} & \text{от 4 до 7} \\ 5 & 3 & 5 & \text{от 1 до 10} \end{pmatrix}.$$

Определить оптимальное решение перевозок, обеспечивающее минимальные транспортные затраты.

Решение. В матрицу расходов введем параметр λ, где $0 \le \lambda \le 3$. Получим

$$\begin{pmatrix} 5+2\lambda & 4-\lambda & 8 & 3+\lambda \\ 4 & 7 & 4+2\lambda & 7-\lambda \\ 5 & 3 & 6 & 1+3\lambda \end{pmatrix}.$$

Полагая $\lambda = 0$, решаем задачу методом потенциалов, определим оптимальное решение перевозок. Распределительная таблица этого решения будет иметь следующий вид.

Таблица 1.12

a_i \ b_j	80	120	150	50	u_i
100	$5+2\lambda$ 30	$4-\lambda$ 70	8	$3+\lambda$	0
200	4 50	7	$4+2\lambda$ 150	$7-\lambda$	$-1-2\lambda$
100	5	3 50	6	$1+3\lambda$ 50	$-1+\lambda$
v_j	$5+2\lambda$	$4-\lambda$	$5+4\lambda$	$2+2\lambda$	

В таблице u_i и v_j — потенциалы строк и столбцов. Для занятых клеток они определяются из условия

$$u_i + v_j = c'_{ij} + \lambda c''_{ij}.$$

Полагая $u_1 = 0$, $v_1 + u_1 = 5 + 2\lambda$, откуда $v_1 = 5 + 2\lambda$.

$v_2 + u_1 = 4 - \lambda$, откуда $v_2 = 4 - \lambda$.

$v_1 + u_2 = 4$ или $5 + 2\lambda + u_2 = 4$, поэтому $u_2 = -1 - 2\lambda$.

$v_3 + u_2 = 4 + 2\lambda$ или $-1 - 2\lambda + v_3 = 4 + 2\lambda$, $v_3 = 5 + 4\lambda$.

Аналогично находим, что $u_3 = -1 + \lambda$, $v_4 = 2 + 2\lambda$.

Оценки свободных клеток находим по формуле

$$\Delta_{ij} = u_j + v_j - (c'_{ij} + \lambda c''_{ij}).$$

$$\Delta_{13} = u_1 + v_3 - c'_{13} = 5 + 4\lambda + 0 - 8 = -3 + 4\lambda,$$

$$\Delta_{14} = u_1 + v_4 - (c'_{14} + \lambda c''_{14}) = 2 + 2\lambda + 0 - 3 - \lambda = -1 + \lambda,$$

$$\Delta_{22} = u_2 + v_2 - c'_{22} = -1 - 2\lambda + 4 - \lambda - 7 = -4 - 3\lambda.$$

Аналогично находим, что $\Delta_{24} = -6 + \lambda$, $\Delta_{31} = -1 + 3\lambda$, $\Delta_{33} = -2 + 5\lambda$.

Решение, полученное при $\lambda = 0$, является оптимальным для всех значений параметра λ, удовлетворяющих условию

$$\Delta_{ij} \le 0 \text{ или } \alpha_{ij} + \lambda\beta_{ij} \le 0,$$

$$\lambda_1 = \max(-\alpha_{ij}/\beta_{ij}) = -\alpha_{22}/\beta_{22} = -3/4,\ \beta_{ij} < 0;$$

$$\lambda_2 = \min(-\alpha_{ij}/\beta_{ij}) = \min(-\alpha_{13}/\beta_{13};\ -\alpha_{14}/\beta_{14};\ -\alpha_{24}/\beta_{24};\ -\alpha_{31}/\beta_{31};\ -\alpha_{33}/\beta_{33}) = \min(3/4;\ 1;\ 6;\ 1/3;\ 2/5) = 1/3,\ \beta > 0.$$

Так как по условию задачи $\lambda \ge 0$, то оптимальное решение сохраняется при $0 \le \lambda \le 1/3$. При этом минимальная стоимость транспортных расходов составляет

$$L(X_1)_{\max} = 30\,(5 + 2\lambda) + 70\,(4 - \lambda) + 50 \cdot 4 + 150\,(4 + 2\lambda) + 50 \cdot 3 + 50\,(1 + 3\lambda) = 1430 + 440\lambda.$$

Таким образом, при $\lambda \in [0;\ 1/3]$ $L(X_1)_{\min} = 1430 + 440\lambda$ и

$$X_{\text{опт}1} = \begin{pmatrix} 30 & 70 & 0 & 0 \\ 50 & 0 & 150 & 0 \\ 0 & 50 & 0 & 50 \end{pmatrix}.$$

Чтобы получить оптимальное решение при $\lambda \geq 1/3$, перераспределим поставки товаров в клетку (3, 1), где $\lambda_2 = 1/3$. Вновь полученное распределение представлено в таблице.

Таблица 1.13

a_i \ b_j	80	120	150	50	u_i
100	$5 + 2\lambda$	$4 - \lambda$ 100	8	$3 + \lambda$	0
200	4 50	7	$4 + 2\lambda$ 150	$7 - \lambda$	$-2 + \lambda$
100	5 30	3 20	6	$1 + 3\lambda$ 50	$-1 + \lambda$
v_j	$6 - \lambda$	$4 - \lambda$	$6 + \lambda$	$2 + 2\lambda$	

Находим оценки свободных клеток:

$$\Delta_{11} = 1 - 3\lambda, \qquad \Delta_{13} = -2 + \lambda,$$

$$\Delta_{14} = -1 + \lambda, \qquad \Delta_{22} = -5,$$

$$\Delta_{24} = -7 + 4\lambda, \qquad \Delta_{33} = -1 + 2\lambda.$$

Определим пределы изменения λ:

$$\lambda_1 = \max\,(-\alpha_{11}/\beta_{11}) = 1/3,\ \beta_{ij} < 0;$$

$$\lambda_2 = \min\,(-\alpha_{13}/\beta_{13};\ -\alpha_{14}/\beta_{14};\ -\alpha_{24}/\beta_{24};\ -\alpha_{31}/\beta_{31};\ -\alpha_{33}/\beta_{33}) =$$
$$= \min\,(2;\ 1;\ 7/4;\ 1/2) = 1/2,\ \beta_{ij} > 0.$$

Полученное в таблице оптимальное решение сохраняется при $1/3 \leq \lambda \leq$ $\leq 1/2$. При этом $L(X_2)_{\min} = 1460 + 350\lambda$.

$$X_{\text{опт}2} = \begin{pmatrix} 0 & 100 & 0 & 0 \\ 50 & 0 & 150 & 0 \\ 30 & 20 & 0 & 50 \end{pmatrix}.$$

Перераспределим поставки грузов в клетку (3, 3), где $\lambda_2 = 1/2$. Получим новое распределение:

Таблица 1.14

b_j / a_i	80	120	150	50	u_i
100	$5 + 2\lambda$	$4 - \lambda$ 100	8	$3 + \lambda$	0
200	4 80	7	$4 + 2\lambda$ 120	$7 - \lambda$	$-3 + 3\lambda$
100	5	3 20	6 30	$1 + 3\lambda$ 50	$-1 + \lambda$
v_j	$7 - 3\lambda$	$4 - \lambda$	$7 - \lambda$	$2 + 2\lambda$	

Находим оценки свободных клеток:

$$\Delta_{11} = 2 - 5\lambda, \qquad \Delta_{13} = -1 - \lambda,$$
$$\Delta_{14} = -1 + \lambda, \qquad \Delta_{22} = -6 + 2\lambda,$$
$$\Delta_{24} = -8 + 6\lambda, \qquad \Delta_{33} = 1 - 2\lambda.$$

Определим пределы изменения λ:

$\lambda_1 = \max(-\alpha_{11}/\beta_{11}; -\alpha_{13}/\beta_{13}; -\alpha_{31}/\beta_{31}) = \max(2/5; -1; 1/2) = 1/2$, $\beta_{ij} < 0$;

$\lambda_2 = \min(-\alpha_{14}/\beta_{14}; -\alpha_{22}/\beta_{22}; -\alpha_{24}/\beta_{24}) = \min(1; 3; 4/3) = 1$, $\beta_{ij} > 0$.

Оптимальное решение сохраняется при $1/2 \le \lambda \le 1$. При этом $L(X_3)_{\min} =$ $= 1490 + 290\lambda$.

$$X_{\text{опт}3} = \begin{pmatrix} 0 & 100 & 0 & 0 \\ 80 & 0 & 120 & 0 \\ 0 & 20 & 30 & 50 \end{pmatrix}.$$

Перераспределим поставки товаров в клетку (1, 4), где $\lambda_2 = 1$.

Таблица 1.15

b_j / a_i	80	120	150	50	u_i
100	$5 + 2\lambda$	$4 - \lambda$ 50	8	$3 + \lambda$ 50	0
200	4 80	7	$4 + 2\lambda$ 120	$7 - \lambda$	$-3 + 3\lambda$
100	5	3 70	6 30	$1 + 3\lambda$	$-1 + \lambda$
v_j	$7 - 3\lambda$	$4 - \lambda$	$7 - \lambda$	$3 + \lambda$	

Оценки свободных клеток:

$$\Delta_{11} = -1 - 2\lambda, \qquad \Delta_{13} = -1 - \lambda,$$

$$\Delta_{22} = -6 + 2\lambda, \qquad \Delta_{24} = -7 + 5\lambda,$$

$$\Delta_{31} = 1 - 2\lambda, \qquad \Delta_{34} = 1 - \lambda.$$

Пределы изменения λ:

$$\lambda_1 = \max\,(\alpha_{11}/\beta_{11};\ -\alpha_{31}/\beta_{31};\ -\alpha_{13}/\beta_{13};\ -\alpha_{34}/\beta_{34}) = \max\,(1/2;\ -1;\ 1/2;\ 1\ ),$$
$$\beta_{ij} < 0;$$

$$\lambda_2 = \min\,(-\alpha_{22}/\beta_{22};\ -\alpha_{24}/\beta_{24}) = \min\,(3;\ 7/5) = 7/5,\ \beta_{ij} > 0.$$

Полученное в предыдущей таблице оптимальное решение сохраняется при $\lambda \le 7/5$.

При этом $L(X_4)_{\min} = 1540 + 240\lambda$.

$$X_{\text{опт } 4} = \begin{pmatrix} 0 & 50 & 0 & 50 \\ 80 & 0 & 120 & 0 \\ 0 & 70 & 30 & 0 \end{pmatrix}.$$

Перераспределим поставки грузов в клетку (2, 4), где $\lambda_2 = 7/5$.

Таблица 1.16

b_j / a_i	80	120	150	50	u_i
100	$5 + 2\lambda$	$4 - \lambda$ 100	8	$3 + \lambda$	0
200	4 80	7	$4 + 2\lambda$ 70	$7 - \lambda$ 50	$-3 + 3\lambda$
100	5	3 20	6 80	$1 + 3\lambda$	$-1 + \lambda$
v_j	$7 - 3l$	$4 - l$	$7 - l$	$10 - 4l$	

Оценки свободных клеток:

$$\Delta_{11} = 2 - 5\lambda, \qquad \Delta_{13} = -1 - \lambda,$$

$$\Delta_{14} = 7 - 5\lambda, \qquad \Delta_{22} = -6 + 2\lambda,$$

$$\Delta_{31} = 1 - 2\lambda, \qquad \Delta_{34} = 8 - 6\lambda.$$

Пределы изменения λ:

$\lambda_1 = \max(2/5;\ -1;\ 7/5;\ 1/2;\ 8/6) = 7/5,\ \beta_{ij} < 0;$

$\lambda_2 = \min(3) = 3,\ \beta_{ij} > 0.$

Оптимальное решение сохраняется при $7/5 \le \lambda \le 3$.

При этом $L(X_5)_{\min} = 1890 - 10\lambda$.

$$X_{\text{опт}5} = \begin{pmatrix} 0 & 100 & 0 & 0 \\ 80 & 0 & 70 & 50 \\ 0 & 20 & 80 & 0 \end{pmatrix}.$$

Глава 2

Целочисленное программирование

2.1. Математическая модель задачи

Некоторые задачи линейного программирования требуют целочисленного решения. К ним относятся задачи по производству и распределению неделимой продукции (загрузка оборудования, распределение автобусов, судов, самолетов по рейсам и т. д.). В общем виде математическая модель задачи целочисленного программирования имеет вид

$$L(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max(\min)$$

при ограничениях:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i$$

$$x_j \geq 0, \text{ целые, } i = \overline{1, m}, \ \ j = \overline{1, n}.$$

Знаки некоторых или всех неравенств могут быть $\leq$, $\geq$.

Оптимальное решение задачи, найденное симплексным методом, часто не является целочисленным. Его можно округлить до ближайших целых чисел. Однако такое округление может дать решение, не лучшее среди целочисленных решений, или может привести к решению, не удовлетворяющему системе ограничений.

2.2. Графический метод решения

При наличии в задаче линейного программирования двух переменных, а в системе ограничений неравенств задача может быть решена графическим методом.

В системе координат $X_1 0 X_2$ находят область допустимых решений, строят вектор C и линию уровня. Перемещая линию уровня по направлению C для задач на максимум, определяют наиболее удаленную от начала координат точку и ее координаты.

В случае когда координаты этой точки нецелочисленные, в области допустимых решений строят целочисленную решетку и находят на ней такие целые числа x_1 и x_2, которые удовлетворяют системе ограничений и при которых значение целевой функции наиболее близко к экстремальному нецелочисленному решению. Координаты такой вершины и являются целочисленным решением.

Аналогично решается задача на минимум. Целочисленному минимуму целевой функции будет соответствовать координата вершины целочисленной решетки, лежащей в области допустимых решений, наиболее близкой к началу координат в направлении вектора C.

Рассмотрим алгоритм решения задачи целочисленного программирования на конкретном примере.

Пример 1. Для улучшения финансового положения фирма приняла решение об увеличении выпуска конкурентоспособной продукции, для чего в одном из цехов необходимо установить дополнительное оборудование, требующее $19/3м^2$ площади. На приобретение дополнительного оборудования фирма выделила 10 тыс. ден. ед., при этом она может купить оборудование двух видов. Приобретение одного комплекта оборудования 1-го вида стоит 1 тыс. ден. ед., 2-го вида — 3 тыс. ден. ед. Приобретение одного комплекта оборудования 1-го вида позволяет увеличить выпуск продукции в смену на 2 ед., а одного комплекта оборудования 2-го вида — на 4 ед.

Зная, что для установки одного комплекта оборудования 1-го вида требуется 2 $м^2$ площади, а для оборудования 2-го вида — 1 $м^2$ площади, определить такой набор дополнительного оборудования, который дает возможность максимально увеличить выпуск продукции.

Решение. Составим математическую модель задачи.

Предположим, что фирма приобретает x_1 комплектов дополнительного оборудования 1-го вида и x_2 комплектов оборудования 2-го вида. Математическая модель задачи будет иметь вид

$$L(\bar{x}) = 2x_1 + 4x_2 \to \max$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 19/3 \\ x_1 + 3x_2 \le 10, \end{cases}$$

$$x_{1,2} \ge 0, \text{ целые.}$$

Получим задачу целочисленного программирования. Так как неизвестных только два (x_1 и x_2), то найдем ее решение графическим способом (рис. 2.1).

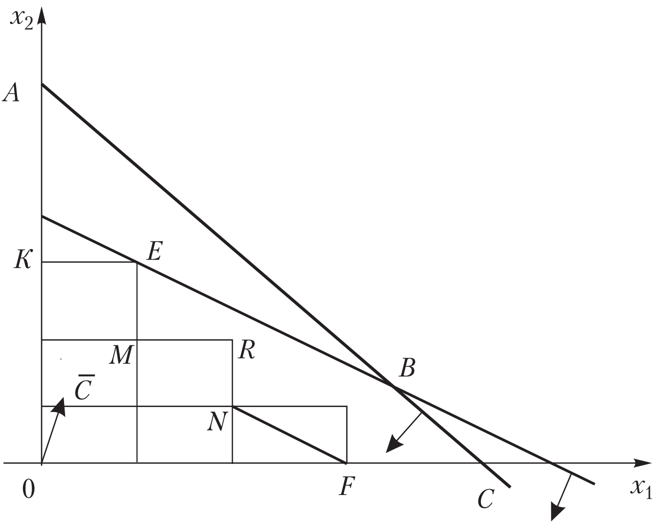


Рис. 2.1

$0ABC$ — область допустимых решений (ОДР). Оптимальное решение задача имеет в точке B (9/5,41/15) при этом максимальное значение целевой функции составляет 218/15 ед. Полученное оптимальное решение не целочисленное.

Условию целочисленности переменных удовлетворяют координаты 12 точек, принадлежащих ОДР. Чтобы найти точку, координаты которой определяют решение исходной задачи, заменим многоугольник $0ABC$ многоугольником $0KEMNF$, содержащим все допустимые точки с целочисленными координатами.

Строим вектор $\overline{C}$ (2,4). Линию уровня перемещаем по направлению $\overline{C}$, получим в точке E (1, 3) максимальное значение целевой функции

$$L(\overline{x}_{\text{цел.}})_{\max} = 2 \cdot 1 + 4 \cdot 3 = 14 \text{ ед.}$$

Ответ. Фирме следует приобрести один комплект оборудования 1-го вида и три комплекта оборудования 2-го вида, что обеспечит ей при имеющихся ограничениях на производственные площади и денежные средства максимальное увеличение выпуска продукции, равное 14 ед. в смену.

2.3. Метод Гомори и его применение в экономических задачах

Целочисленное решение может быть найдено с использованием алгоритма, предложенного Гомори, который состоит в следующем.

Симплексным методом находят оптимальное решение задачи. Если решение целочисленное, то задача решена. Если же оно не целочисленное и содержит хотя бы одну дробную координату, то накладывают дополнительное ограничение по целочисленности и вычисления продолжают до получения нового решения. Если и оно является не целочисленным, то вновь накладывают дополнительное ограничение по целочисленности. Вычисления продолжают до тех пор, пока не будет получено целочисленное решение или показано, что задача не имеет целочисленного решения.

Пусть получено оптимальное решение $\overline{x}_{\text{цел.}} = (f_1, f_2, ..., f_r, 0, 0, ..., 0)$, которое не является целочисленным, тогда последний шаг симплексной таблицы имеет следующий вид:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
x_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & h_{1,r+1} & \dots & h_{1,n} & f_1, \\
x_2 & 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & h_{2,r+1} & \dots & h_{2n} & f_2, \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots, \\
x_i & 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & h_{i,r+1} & \dots & h_{in} & f_i, \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots, & \dots & \dots & \dots \\
x_r & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & h_{r,r+1} & \dots & h_{rn} & f_r,
\end{array}$$

где r — ранг системы ограничений;

$h_{i,r+1}$ — коэффициент симплексной таблицы i-й строки, $r+1$ столбца;

f_i — свободный член i-й строки.

Пусть f_i и хотя бы одно h_{ij} $(j = \overline{r+1, n},\ i = \overline{1, r})$ — дробные числа.

Обозначим $[f_i]$ и $[h_{ij}]$ — целые части чисел f_i и h_{ij}.

Целой частью числа f_i называют наибольшее целое число, не превосходящее числа f_i.

Дробную часть чисел f_i и h_{ij} обозначим $\{f_i\}$ и $\{h_{ij}\}$, она определяется следующим образом:

$$\{f_i\} = f_i - [f_i],\ \{h_{ij}\} = h_{ij} - [h_{ij}].$$

Пример 2. Найти целые и дробные части чисел.

$$\left[\frac{4}{5}\right] = 0, \qquad \left\{\frac{4}{5}\right\} = \frac{4}{5} - 0 = \frac{4}{5},$$

$$\left[\frac{8}{3}\right] = 2, \qquad \left\{\frac{8}{3}\right\} = \frac{8}{3} - 2 = \frac{2}{3},$$

$$\left[-\frac{4}{5}\right] = -1, \qquad \left\{\frac{4}{5}\right\} = \frac{4}{5} - 0 = \frac{4}{5},$$

$$\left[-\frac{8}{3}\right] = -3, \qquad \left\{\frac{8}{3}\right\} = \frac{8}{3} - 2 = \frac{2}{3}.$$

Если f_i и хотя бы одно значение h_{ij} дробное, то с учетом введенных обозначений целых и дробных чисел дополнительное ограничение по целочисленности примет вид

$$\{h_{i,r+1}\}x_{r+1} + \{h_{i,r+2}\}x_{r+2} + \ldots + \{h_{1n}\}x_n > \{f_i\}.$$

Примечание 1. Если f_i дробное, а все h_{ij} целые, то задача не имеет целочисленного решения.

Примечание 2. Ограничение целочисленности может быть наложено не на все переменные, а лишь на их часть. В этом случае задача является частично целочисленной.

Решим пример 1 методом Гомори.

Математическая модель задачи:

$$L(\bar{x}) = 2x_1 + 4x_2 \to \max$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 19/3, \\ x_1 + 3x_2 + x_4 = 10, \end{cases}$$

$$x_{1,2} \geq 0, \text{ целые.}$$

Решение задачи симплексным методом представлено в табл. 2.1.

Таблица 2.1

c_i	БП	2	4	0	0	b_i
		x_1	x_2	x_3	x_4	
0	x_3	2	1	1	0	19/3
0	x_4	1	3	0	1	10
	Δ_j	–2	–4	0	0	0
0	x_3	5/3	0	1	–1/3	3
4	x_2	1/3	1	0	1/3	10/3
	Δ_j	–2/3	0	0	4/3	40/3
2	x_1	1	0	3/5	–1/5	9/5
4	x_2	0	1	–1/5	2/5	41/15
	Δ_j	0	0	2/5	6/5	218/15

$$\bar{x}_{\text{цел.}} = (9/5{,}41/15),\ L(\bar{x}) = 218/15.$$

Найдем дробные части чисел 9/5 и 41/15 (1 и 2 строки 3-го шага):

$$\left\{\frac{9}{5}\right\} = \frac{9}{5} - 1 = \frac{4}{5}; \qquad \left\{\frac{41}{15}\right\} = \frac{41}{15} - 2 = \frac{11}{15}; \qquad \frac{4}{5} = \frac{12}{15} > \frac{11}{15},$$

учитывая дробные части чисел 3/5 и –1/5 (1 строка 3-го шага):

$$\left\{\frac{3}{5}\right\} = \frac{3}{5} - 0 = \frac{3}{5}; \quad \left\{-\frac{1}{5}\right\} = -\frac{1}{5} + 1 = \frac{4}{5},$$

составляем дополнительное ограничение целочисленности для 1-й строки 3-го шага:

$$3/5x_3 + 4/5x_4 \geq 4/5 \text{ или } 3/5x_3 + 4/5x_4 - x_5 = 4/5.$$

Дальнейшие расчеты проводим в табл. 2.2.

Таблица 2.2

c_i	БП	2	4	0	0	0	b_i
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
	x_1	1	0	3/5	–1/5	0	9/5
	x_2	0	1	–1/5	2/5	0	41/15
		0	0	3/5	4/5	–1	4/5
2	x_1	1	0	0	–1	1	1

c_i	БП	2	4	0	0	0	b_i
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
4	x_2	0	1	0	2/3	–1/3	3
0	x_3	0	0	1	4/3	–5/3	4/3
	Δ_j	0	0	0	2/3	2/3	14

$$\bar{x}_{\text{цел.}} = (1,\ 3) \text{ при этом } L(\bar{x}) = 14.$$

Сравнивая полученное значение целевой функции целочисленного решения со значением при оптимальном решении, следует заметить, что нахождение целочисленного решения приводит к уменьшению ее экстремального значения.

Ответ.

$$\bar{x}_{\text{цел.}} = (1,\ 3),\ L(\bar{x}) = 14.$$

Глава 3

Нелинейное программирование

Нелинейное программирование — это раздел математического программирования, объединяющий теорию и методы решения задач отыскания экстремальных значений, в которых целевая функция или система ограничений (или та и другая) содержат выражения, нелинейные относительно искомых величин.

3.1. Основные понятия и математическая модель задачи

Математическая модель задачи нелинейного программирования в общем виде формулируется следующим образом: найти вектор $\bar{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$, удовлетворяющий системе ограничений:

$$\begin{gathered} g_i(x_1, x_2, ..., x_n) = b_i,\ i = \overline{1, m_1}, \\ g_i(x_1, x_2, ..., x_n) \le b_i,\ i = m_1 + \overline{1, m_2}, \\ g_i(x_1, x_2, ..., x_n) = b_i,\ i = m_2 + \overline{1, m}, \end{gathered} \tag{3.1}$$

и доставляющий экстремум (наибольшее или наименьшее значение) целевой функции

$$L = f(x_1, x_2, ..., x_n), \tag{3.2}$$

где x_j — переменные;

$j = 1, n, L, f, g_i$ — заданные функции от n переменных;

b_i — фиксированные значения.

В экономике это соответствует тому, что результаты деятельности предприятий возрастают или убывают непропорционально изменению масштабов использования ресурсов, например, из-за насыщения спроса на товары, когда каждую следующую единицу продать труднее, чем предыдущую, и т. д.

Для задач нелинейного программирования, в отличие от линейных задач, нет единого метода решения. В зависимости от вида целевой функции и системы ограничений разработаны специальные методы решения, к которым относятся методы множителей Лагранжа, квадратичное и выпуклое программирование, градиентные методы, приближенные методы решения, графический метод.

В нелинейном программировании наиболее разработаны задачи, в которых система ограничений линейная, а целевая функция нелинейная. Однако даже для таких задач оптимальное решение может быть найдено только для определенного класса целевых функций. Например, когда целевая функция сепарабельная, т. е. является суммой n функций $f_j(x_j)$, или квадратичная. При этом следует отметить, что в отличие от задач линейного программирования, где точками экстремума являются вершины многогранника решений, в задачах с нелинейной целевой функцией они могут находиться внутри многогранника, на его ребре или в вершине.

При решении задач нелинейного программирования целевая функция требует определения глобального максимума или минимума. Глобальный максимум (минимум) функции — это ее наибольшее (наименьшее) значение из локальных максимумов (минимумов).

Наличие локальных экстремумов затрудняет решение задач, так как большинство существующих методов нелинейного программирования не позволяют установить, является ли найденный экстремум локальным или глобальным. Поэтому имеется возможность в качестве оптимального решения принять локальный экстремум, который может существенно отличаться от глобального.

3.2. Графический метод

Рассмотрим примеры решения задач нелинейного программирования с двумя переменными, причем их целевые функции и системы ограничений могут быть заданы в линейном и нелинейном виде. Так же как и в задачах линейного программирования, они могут быть решены графически.

3.2.1. Задача с линейной целевой функцией и нелинейной системой ограничений

Пример 1. Найти глобальные экстремумы функции $L = 2x_1 + x_2$ при ограничениях:

$$x_1^2 + x_2^2 \le 16,$$

$$x_{1,2} \ge 0.$$

Решение. Область допустимых решений — часть окружности радиусом 4, которая расположена в первой четверти.

Линиями уровня целевой функции являются параллельные прямые с угловым коэффициентом, равным –2. Глобальный минимум достигается в точке 0 (0, 0), глобальный максимум в точке A касания линии уровня и окружности. Проведем через точку A прямую, перпендикулярную линии уровня. Прямая проходит через начало координат, имеет угловой коэффициент 1/2 и уравнение $x_2 = 1/2x_1$.

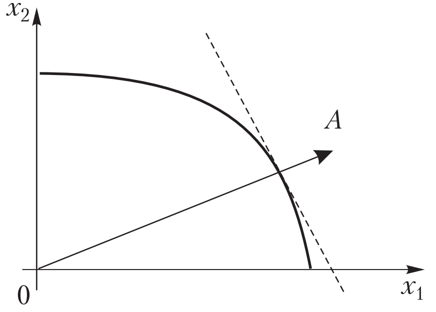


Рис. 3.1

Решаем систему уравнений

$$x_1^2 + x_2^2 = 16,$$

$$x_2 = 1/2x_1,$$

откуда находим

$$x_1 = 8\sqrt{5}/5, \quad x_2 = 4\sqrt{5}/5, \quad L = 16\sqrt{5}/5 + 4\sqrt{5}/5 = 4\sqrt{5}/5.$$

Ответ. Глобальный минимум, равный нулю, достигается в точке 0 (0; 0), глобальный максимум, равный $4\sqrt{5}$, в точке A $(8\sqrt{5}/5;\ 4\sqrt{5}/5)$.

3.2.2. Задача с нелинейной целевой функцией и линейной системой ограничений

Пример 2. Найти глобальные экстремумы функции

$$L = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 12, \\ x_1 + x_2 \le 9, \end{cases}$$
$$x_{1,2} \ge 0.$$

Решение. Область допустимых решений — $0ABD$ (рис. 3.2). Линиями уровня будут окружности с центром в точке O_1. Максимальное значение целевая функция имеет в точке D (9; 0), минимальное — в точке O_1 (2; 3). Поэтому

$$L(D) = (9 - 2)^2 + (0 - 3)^2 = 58.$$

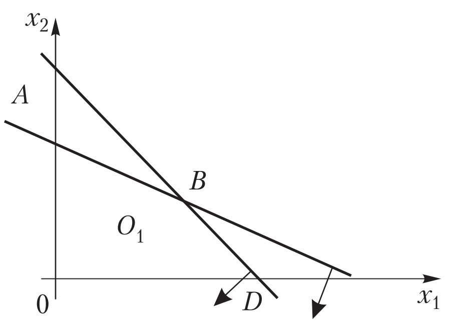


Рис. 3.2

Ответ. Глобальный максимум, равный 58, достигается в точке D (9; 0), глобальный минимум, равный нулю, — в точке O_1 (2; 3).

Пример 3. Найти глобальные экстремумы функции

$$L = (x_1 - 6)^2 + (x_2 - 3)^2$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 14, \\ 3x_1 + 2x_2 \le 15, \end{cases}$$
$$x_{1,2} \ge 0.$$

Решение. Область допустимых решений — многоугольник $0ABD$ (рис. 3.3). Линии уровня представляют окружности с центром в точке O_1 (6; 3). Глобальный максимум находится в точке 0 (0; 0), как самой удаленной от точки O_1. Глобальный минимум расположен в точке E, находящейся на пересечении прямой $3x_1 + 2x_2 = 15$ и перпендикуляра к этой прямой, проведенного из точки O_1.

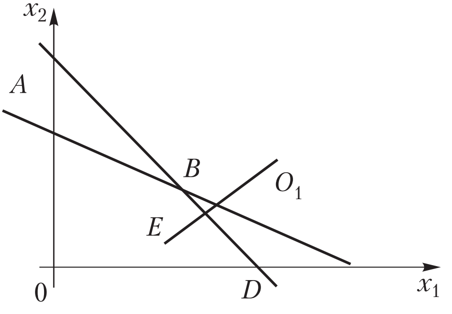


Рис. 3.3

Найдем координаты точки E: так как угловой коэффициент прямой $3x_1 + 2x_2 = 15$ равен $-3/2$, угловой коэффициент перпендикуляра O_1E равен $2/3$. По уравнению прямой, проходящей через данную точку O_1 с угловым коэффициентом $2/3$, получим

$$(x_2 - 3) = 2/3(x_1 - 6), \text{ откуда } 2x_1 - 3x_2 = 3.$$

Решая систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 3, \\ 3x_1 + 2x_2 = 15, \end{cases}$$

получим координаты точки E: $x_1 = 51/13$, $x_2 = 21/13$, при этом $L(E) =$ $= 1053/169$.

Координаты точки E можно получить следующим методом: продифференцируем выражение $(x_1 - 6)^2 + (x_2 - 3)^2$ как неявную функцию от x_1, получим

$$2(x_1 - 6) + 2(x_2 - 3)x_2' = 0,$$

$$x_2' = (6 - x_1)/(x_2 - 3).$$

Приравниваем полученное значение тангенсу угла наклона прямой $3x_1 + 2x_2 = 15$.

$$(6 - x_1)/(x_2 - 3) = -3/2 \text{ или } 2x_1 - 3x_2 = 3.$$

Решая совместно полученное выражение с уравнением прямой $3x_1 + 2x_2 = 15$

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 3, \\ 3x_1 + 2x_2 = 15, \end{cases}$$

получим координаты точки E: $x_1 = 51/13$, $x_2 = 21/13$.

Ответ. Глобальный максимум, равный 52, находится в точке 0 (0, 0). Глобальный минимум, равный 1053/169, — в точке E (51/13, 21/13).

3.2.3. Задача с нелинейной целевой функцией и нелинейной системой ограничений

Пример 4. Найти глобальные экстремумы функции

$$L = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2$$

при ограничениях:

$$x_1^2 + x_2^2 \le 16,$$

$$x_{1,2} \ge 0.$$

Решение. Областью допустимых решений является окружность с радиусом 4, расположенная в первой четверти (рис. 3.4). Линиями уровня являются окружности с центром в точке O_1 (2;1).

Глобальный минимум достигается в точке O_1, глобальный максимум — в точке A (0;4). Целевая функция в точке A будет равна

$$L(A) = (0 - 2)^2 + (4 - 1)^2 = 13.$$

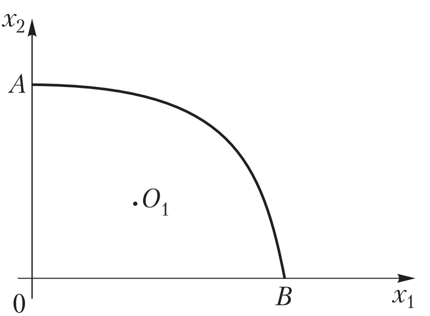


Рис. 3.4

Ответ. Глобальный минимум, равный нулю, достигается в точке O_1 (2, 1), глобальный максимум, равный 13, находится в точке A (0; 4).

Пример 5. Найти глобальные экстремумы

$$L = x_1^2 + x_2^2$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 x_2 \le 4, \\ x_1 + x_2 \ge 5, \\ x_1 \le 7, \;\; x_2 \le 6, \;\; x_{1,2} \ge 0. \end{cases}$$

Решение.

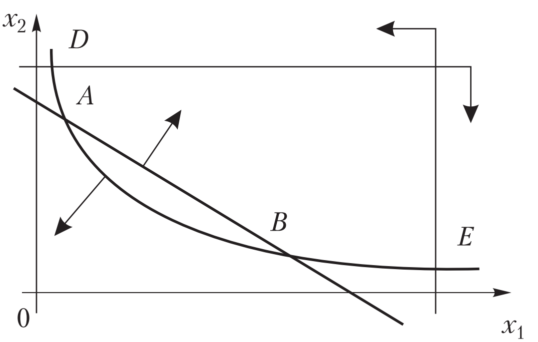


Рис. 3.5

Область допустимых решений (рис. 3.5) не является выпуклой и состоит из двух частей. Линиями уровня являются окружности с центром в точке 0 (0; 0).

Найдем координаты точек A и B, решая систему

$$\begin{cases} x_1 x_2 = 4, \\ x_1 + x_2 = 5, \end{cases}$$

получим A (1, 4), B (4, 1). В этих точках функция имеет глобальные минимумы, равные 17. Найдем координаты точек D и E, решая систему

$$\begin{cases} x_1 x_2 = 4, \\ x_2 = 6, \;\; x_1 = 7, \end{cases}$$

откуда точка D (2/3, 6) и $L(D) = 328/9$, точка E (7, 4/7) и $L(E) =$ $= 2417/49$.

Ответ. Целевая функция имеет два глобальных минимума, равных 17, в точках A (1, 4) и B (4, 1), глобальный максимум, равный 2417/49, достигается в точке E (7, 4/7).

3.3. Дробно-линейное программирование

3.3.1. Математическая модель задачи

Дробно-линейное программирование относится к нелинейному программированию, так как имеет целевую функцию, заданную в нелинейном виде.

Задача дробно-линейного программирования в общем виде записывается следующим образом:

$$L = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \ / \sum_{j=1}^{n} d_j x_j \ \to \max(\min) \tag{3.3}$$

при ограничениях:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \tag{3.4}$$

$$x_j \geq 0,\ i = \overline{1, m},\ j = \overline{1, n},$$

где c_j, d_j, b_i, $a_{i\,j}$ — постоянные коэффициенты и $\Sigma\, d_j\, x_j \neq 0$.

Рассмотрим задачу дробно-линейного программирования в виде

$$L = (c_1 x_1 + c_2 x_2)/(d_1 x_2 + d_2 x_2) \to \max\ (\min) \tag{3.5}$$

при ограничениях:

$$a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 \leq b_i, \tag{3.6}$$

$$x_{1,\,2} \geq 0.$$

Будем считать, что $d_1 x_1 + d_2 x_2 \neq 0$.

Для решения этой задачи найдем многоугольник решений, определяемый ограничениями (3.6). Пусть многоугольник не представляет пустое множество. Из выражения (3.5) найдем x_2:

$$Ld_1 x_1 + Ld_2 x_2 = c_1 x_1 + c_2 x_2,$$

$$x_2\,(Ld_2 - c_2) = x_1 (c_1 - Ld_1),$$

$$x_2 = x_1 (c_1 - Ld_1)/(Ld_2 - c_2),\ x_2 = kx_1,$$

где $k = (c_1 - Ld_1)/(Ld_2 - c_2)$;

$x_2 = k\,x_1$ — прямая, проходящая через начало координат.

При некотором фиксированном значении L угловой коэффициент k тоже фиксирован и прямая займет определенное положение. При изменении значений L прямая $x_2 = k\,x_1$ будет поворачиваться вокруг начала координат (рис. 3.6).

Установим, как будет вести себя угловой коэффициент k при монотонном возрастании L.

Найдем производную от k по L.

$$\frac{dk}{dL} = k' = \frac{-d_1(Ld_2 - c_2) - d_2(c_1 - Ld_1)}{(Ld_2 - c_2)^2} = \frac{d_1c_2 - d_2c_1}{(Ld_2 - c_2)^2}.$$

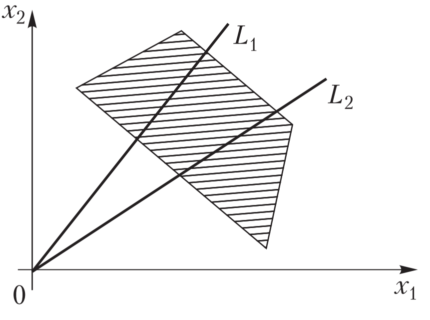


Рис. 3.6

Знаменатель производной всегда положителен, а числитель от L не зависит. Следовательно, производная имеет постоянный знак и при увеличении L угловой коэффициент будет только возрастать или только убывать, а прямая будет поворачиваться в одну сторону. Если угловой коэффициент прямой имеет положительное значение, то прямая вращается против движения часовой стрелки, при отрицательном значении k — по часовой стрелке. Установив направление вращения, находим вершину или вершины многогранника, в которых функция принимает max (min) значение, либо устанавливаем неограниченность задачи.

При этом возможны следующие случаи.

1. Многогранник решений ограничен, максимум и минимум достигаются в его угловых точках (рис. 3.7).
2. Многогранник решений не ограничен, однако существуют угловые точки, в которых целевая функция принимает максимальное и минимальное значения (рис. 3.8).
3. Многогранник решений не ограничен, один из экстремумов имеется. Например, минимум достигается в одной из вершин многогранника решений и имеет так называемый асимптотический максимум (рис. 3.9).
4. Многогранник решений не ограничен. Максимум и минимум являются асимптотическими (рис. 3.10).

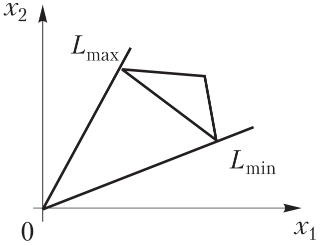


Рис. 3.7

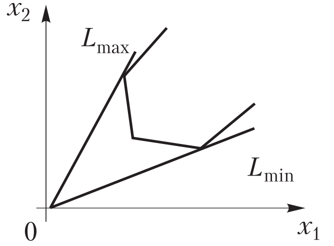


Рис. 3.8

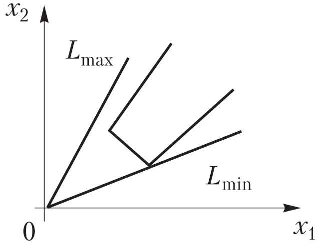


Рис. 3.9

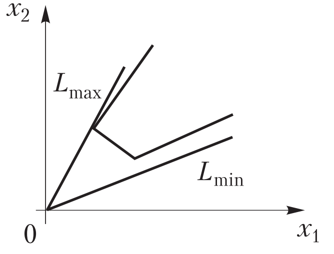


Рис. 3.10

3.3.2. Применение дробно-линейного программирования в экономике

Математическая модель задачи дробно-линейного программирования может быть использована для определения рентабельности производства изделий, затрат в расчете на рубль выпускаемой продукции, себестоимости изделий.

Обозначим:

r_j — прибыль предприятия от реализации единицы изделия j-го вида;

x_j — количество выпущенной продукции j-го вида;

s_j — оптовая цена единицы продукции j-го вида;

c_j — себестоимость производства единицы изделия j-го вида;

d_j — затраты на производство одного изделия j-го вида.

Задача рентабельности (P) производства изделий имеет вид

$$P = \Sigma\, r_j\, x_j / \Sigma\, c_j\, x_j \to \max.$$

Задача определения затрат ($З_р$) в расчете на рубль товарной продукции записывается в виде

$$З_р = \Sigma c_j\, x_j / \Sigma\, s_j\, x_j \to \min.$$

Задача нахождения себестоимости (c_j) изделия имеет вид

$$c_j = \Sigma d_j / \Sigma x_j \to \min.$$

Указанные математические модели имеют системы ограничений в зависимости от условий задачи.

Приведем алгоритм решения задач:

1. Находим многогранник решений.
2. Определяем угловой коэффициент k и устанавливаем направление поворота целевой функции.
3. Находим точку max (min) целевой функции или устанавливаем неразрешимость задачи.

Рассмотрим использование дробно-линейного программирования при нахождении себестоимости выпускаемых изделий.

Пример 6. Для производства двух видов изделий A и B предприятие использует три типа технологического оборудования. Каждое из изделий должно пройти обработку на данном типе оборудования. Время обработки каждого из изделий, затраты, связанные с производством одного изделия, даны в таблице.

Оборудование I и III типов предприятие может использовать не более 26 и 39 ч соответственно, оборудование II типа целесообразно использовать не менее 4 ч.

Определить, сколько изделий каждого вида следует изготовить предприятию, чтобы себестоимость одного изделия была минимальной.

Тип оборудования	Затраты времени на обработку 1 изделия, ч	
	A	*B*
I	2	8
II	1	1
III	12	3
Затраты на производство 1 изделия, тыс. ден. ед.	2	3

Решение. Составим математическую модель задачи.

Пусть x_1 — количество изделий вида *A*, которое следует изготовить предприятию, x_2 — количество изделий вида *B*. Общие затраты на их производство составят $(2x_1 + 3x_2)$ тыс. ден. ед., а себестоимость одного изделия равна

$$(2x_1 + 3x_2)/(x_1 + x_2).$$

Математическая модель задачи примет вид

$$L = (2x_1 + 3x_2)/(x_1 + x_2) \to \min$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} 2x_1 + 8x_2 \le 26, \\ x_1 + x_2 \ge 4, \\ 12x_1 + 3x_2 \le 39, \end{cases}$$
$$x_{1,2} \ge 0.$$

Δ *ABC* — область допустимых решений (рис. 3.11).

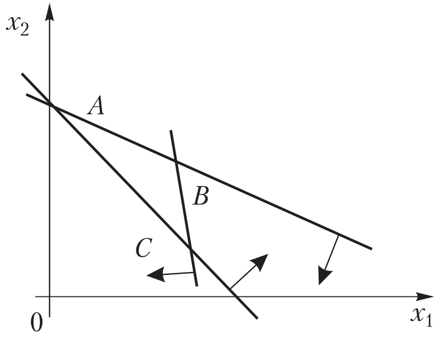


Рис. 3.11

Найдем x_2:

$$L = (2x_1 + 3x_2)/(x_1 + x_2),\ 2x_1 + 3x_2 = Lx_1 + Lx_2,\ x_2\,(3 - L) = x_1\,(L - 2),$$

$$x_2 = x_1\,(L - 2)/(3 - L) = kx_1.$$

Угловой коэффициент прямой

$$k = (L - 2)/(3 - L),$$

так как dk/dL положительна, то функция $k = (L - 2)/(3 - L)$ возрастает. Это соответствует вращению прямой против движения часовой стрелки. Следовательно, в точке C (см. рис. 3.11) целевая функция будет иметь наименьшее значение (глобальный минимум).

$$\frac{dk}{dL} = \frac{(3 - L) - (-1)(L - 2)}{(3 - L)^2} = \frac{1}{(3 - L)^2}.$$

$$12x_1 + 3x_2 = 39,$$

$$x_1 + x_2 = 4,$$

$$x_1 = 3,\ x_2 = 1,$$

$$C\ (3,\ 1).$$

$$\bar{x}_{\text{опт}} = (3,\ 1),\ L = 9/4.$$

Ответ. Себестоимость одного изделия будет минимальной и равной 2,25 тыс. ден. ед., при выпуске предприятием трех изделий вида A и одного изделия вида B.

3.3.3. Сведение математической модели дробно-линейного программирования к задаче линейного программирования

Задачу дробно-линейного программирования можно свести к задаче линейного программирования и решить симплексным методом.

Обозначим

$$y_0 = 1\Big/\sum_{j=1}^{n} d_j x_j, \tag{3.7}$$

$$\sum_{j=1}^{n} d_j x_j \neq 0 \tag{3.8}$$

и введем новые переменные $y_j = y_0 x_j$.

Тогда задача примет вид

$$L = \sum_{j=1}^{n} c_j y_j \to \max(\min) \tag{3.9}$$

при ограничениях:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j - b_i y_0 = 0,$$

$$\sum_{j=1}^{n} d_j y_j = 1, \tag{3.10}$$

$$y_j \geq 0,\ y_0 > 0,\ i = \overline{1, m},\ j = \overline{1, n}.$$

Определив оптимальное решение задачи (3.9) с ограничениями (3.10), используя соотношения (3.7) и (3.8), получим оптимальное решение исходной задачи (3.3) и (3.4).

Приведем алгоритм решения:

1. Сводим задачу (3.5), (3.6) к задаче линейного программирования (3.9), (3.10).
2. Находим решение задачи.
3. Используя соотношение (3.8), находим оптимальное решение и значение целевой функции.

Покажем сведение задачи дробно-линейного программирования к задаче линейного программирования на конкретном примере.

Пример 7.

$$L = (2x_1 - x_2)/(x_1 + 2x_2 + 1) \to \max$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 6, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0,\ j = \overline{1, 4}.$$

Решение. Обозначим: $x_1 + 2x_2 + 1 = 1/y_0$, $y_0 > 0$, тогда $L = 2x_1 y_0 - x_2\, y_0$.

Обозначим: $x_1 y_0 = y_1$, $x_2 y_0 = y_2$, $x_3 y_0 = y_3$, $x_4 y_0 = y_4$.

Преобразуем систему ограничений, умножив обе части всех ограничений на y_0, и перейдем к переменным y_0, y_1, y_2, y_3, y_4.

Задача примет вид

$$L = 2y_1 - y_2 \to \max$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} -2y_0 + y_1 - 2y_2 + y_3 = 0, \\ -6y_0 + 2y_1 + y_2 + y_4 = 0, \\ y_0 + y_1 + 2y_2 = 1, \end{cases}$$

$$y_j \geq 0, \ \ j = \overline{1, 4}, \ \ y_0 > 0.$$

Получили задачу линейного программирования. Решаем ее симплексным методом.

Таблица 3.1

c_i	БП	0	2	–1	0	0	b_i
		y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	
	y_3	–2	1	–2	1	0	0
	y_4	–6	2	1	0	1	0
		1	1	2	0	0	1
0	y_3	0	3	2	1	0	2
0	y_4	0	8	13	0	1	6
0	y_0	1	1	2	0	0	1
	Δ_j	0	–2	1	0	0	0
2	y_1	0	1	2/3	1/3	0	2/3
0	y_4	0	0	2/3	–8/3	1	2/3
0	y_0	1	0	4/3	–1/3	0	1/3
	Δ_j	0	0	7/3	2/3	0	4/3

$$\overline{y}_{\text{опт}} = (1/3,\ 2/3,\ 0,\ 0,\ 2/3).$$

$$x_1 = y_1/y_0 = 2,\ x_2 = y_2/y_0 = 0,\ x_3 = y_3/y_0 = 0,\ x_4 = y_4/y_0 = 2.$$

Ответ.

$$\overline{x}_{\text{опт}} = (2,\ 0,\ 0,\ 2),\ L_{\max} = 4/3.$$

3.4. Метод множителей Лагранжа

Дана задача нелинейного программирования

$$L = f(x_1, x_2, ..., x_n) \to \max\ (\min)$$

при ограничениях:

$$g_i(x_1, x_2, ..., x_n) = 0,\ i = \overline{1, m}.$$

Предположим, что функции $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ и $g_i(x_1, x_2, ..., x_n)$ непрерывны вместе со своими первыми частными производными.

Ограничения заданы в виде уравнений, поэтому для решения задачи воспользуемся методом отыскания условного экстремума функции нескольких переменных.

3.4.1. Алгоритм решения

Для решения задачи составляется функция Лагранжа:

$$F(x_1,\ x_2,\ldots,\lambda_1,\ \lambda_2,\ldots,\lambda_m) = f(x_1,\ x_2,\ \ldots,x_n) + \sum_{i=1}^{m}\lambda_i g_i(x_1,\ x_2,\ \ldots,x_n),$$

где λ_i — множители Лагранжа.

Затем определяются частные производные:

$$\partial F/\partial x_j,\ j = \overline{1, n}, \partial F/\partial \lambda_i,\ i = \overline{1, m}.$$

Приравняв к нулю частные производные, получим систему:

$$\partial F/\partial x_j = \partial f/\partial x_j + \sum_{i=1}^{m}\lambda_i\ \partial g_i/\partial x_j = 0,$$

$$\partial F/\partial \lambda_j = g_i(x_1, x_2, ..., x_n).$$

Решая систему, получим множество точек, в которых целевая функция L может иметь экстремальные значения. Следует отметить, что условия рассмотренной системы являются необходимыми, но недостаточными. Поэтому не всякое полученное решение определяет точку экстремума целевой функции. Применение метода бывает оправданным, когда заранее предполагается существование глобального экстремума, совпадающего с единственным локальным максимумом или минимумом целевой функции.

Пример 8. Найти точку условного экстремума функции

$$L = x_1x_2 + x_2x_3$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 2, \\ x_2 + 2x_3 = 4. \end{cases}$$

Решение. Составим функцию Лагранжа:

$$F(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \lambda_2) = x_1x_2 + x_2x_3 + \lambda_1 (x_1 - x_2 - 2) + \lambda_2 (x_2 + 2x_3 - 4).$$

Найдем частные производные функции Лагранжа по переменным x_1, x_2, x_3, λ_1, λ_2. Приравняв к нулю полученные выражения, решим систему

$$\begin{cases} \partial F/\partial x_1 = x_2 + \lambda_1 = 0, \\ \partial F/\partial x_2 = x_1 + x_3 - \lambda_1 + \lambda_2 = 0, \\ \partial F/\partial x_3 = x_2 + 2\lambda_2 = 0, \\ \partial F/\partial \lambda_1 = x_1 - x_2 - 2 = 0, \\ \partial F/\partial \lambda_2 = x_2 + 2x_3 - 4 = 0. \end{cases}$$

Откуда $\lambda_1 = -x_2$, $\lambda_2 = -x_2/2$, $x_1 = -2$, $x_2 = -4$, $x_3 = 4$, $L = -8$.

Определим характер экстремума, изменяя полученные значения переменных. Измененные значения должны удовлетворять заданной системе ограничений. Возьмем $x_1 = -1$ (больше $x_1 = -2$), тогда из системы ограничений $x_2 = -3$, $x_3 = 7$, $L = -18$, при $x_1 = -3$ (меньше $x_1 = -2$), $x_2 = -5$, $x_3 = 9$, $L = -30$. Следовательно $L = -8$ — максимальное значение функции.

Ответ. Точка экстремума $x_1 = -2$, $x_2 = -4$, $x_3 = 4$, при этом максимальное значение функции $L = -8$.

3.4.2. Применение метода множителей Лагранжа в экономике

Рассмотрим применение метода на примере решения задачи оптимальной реализации продукции.

Пример 9. Мукомольный комбинат реализует муку двумя способами: в розницу через магазин и оптом через торговых агентов. При продаже x_1 кг муки через магазин расходы на реализацию составляют x_1^2 ден. ед., а при продаже x_2 кг муки посредством торговых агентов — x_2^2 ден. ед.

Определить, сколько кг муки следует продавать каждым способом, чтобы затраты на реализацию были минимальными, если в сутки для продажи выделяется 5000 кг муки.

Решение. Составим математическую модель задачи.

Найдем минимум суммарных расходов

$$L = x_1^2 + x_2^2$$

при ограничениях:

$$x_1 + x_2 = 5000,$$

$$x_{1,2} \geq 0.$$

Для расчета модели используем метод множителей Лагранжа. Составим функцию Лагранжа.

$$F(x_1, x_2, \lambda) = x_1^2 + x_2^2 + \lambda\,(x_1 + x_2 - 5000).$$

Найдем частные производные функции F по x_1, x_2 и λ, приравняем к нулю, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + \lambda = 0, \\ 2x_2 + \lambda - 0, \\ x_1 + x_2 - 5000 = 0, \end{cases}$$

откуда $\lambda = -5000$, $x_1 = 2500$, $x_2 = 2500$, $L = 12\,500$ тыс. ден. ед.

Давая x_1 значения больше и меньше 2500 находим L и из определения экстремума функции получаем, что L при $x_1 = x_2 = 2500$ достигает минимума.

Ответ. Для получения минимальных расходов необходимо расходовать в сутки через магазин и торговых агентов по 2500 кг муки, при этом расходы на реализацию составят 12 500 тыс. ден. ед.

3.5. Выпуклое программирование

3.5.1. Основные определения и теоремы

Дана задача нелинейного программирования:

$$f(x_1, x_2, ..., x_j, ..., x_n)\ \max, \tag{3.11}$$

$$g_i(x_1, x_2, ..., x_j, ..., x_n) \leq b_i,\ i = \overline{1, m}, \tag{3.12}$$

$$x_j \geq 0,\ j = \overline{1, n}, \tag{3.13}$$

где f и g_i — некоторые функции n переменных $x_1, x_2, x_j, ..., x_n$.

Для решения сформулированной задачи в такой общей постановке не существует универсальных методов. Однако для отдельных классов задач, в которых сделаны дополнительные ограничения относительно свойств функций f и g_i, разработаны методы решения. В частности, ряд таких методов имеется для решения задач нелинейного программирования вида (3.11)–(3.13) при условии, что f — вогнутая (выпуклая) функция и область допустимых решений, определяемая ограничениями (3.12) и (3.13), — выпуклая функция.

Определение 1. Функция $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, заданная на выпуклом множестве X, называется *выпуклой*, если для любых двух точек x_1 и x_2 из множества X и любого $0 \le \lambda \le 1$ выполняется соотношение

$$f[\lambda x_2 + (1-\lambda)x_1] \le \lambda f(x_2) + (1-\lambda) f(x_1). \tag{3.14}$$

Определение 2. Функция $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, заданная на выпуклом множестве X, называется *вогнутой,* если для любых двух точек x_1 и x_2 из множества X и любого $0 \le \lambda \le 1$ выполняется соотношение

$$f[\lambda x_2 + (1-\lambda)x_1] \ge \lambda f(x_2) + (1-\lambda) f(x_1). \tag{3.15}$$

Определение 3. Говорят, что множество допустимых решений задачи (3.11)–(3.16) удовлетворяет *условию регулярности*, если существует по крайней мере одна точка X, принадлежащая области допустимых решений такая, что $g_i, (x_i) < b_i$.

Определение 4. Задача (3.11)–(3.13) называется *задачей выпуклого программирования,* если функция $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, является вогнутой (выпуклой), а функции $g_i(x)$ — выпуклыми.

Теорема 3.1. *Любой локальный максимум (минимум) задачи выпуклого программирования является глобальным максимумом (минимумом).*

Определение 5. *Функцией Лагранжа* задачи выпуклого программирования (3.11)–(3.13) называется функция

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots y_m) = f(x_1, x_2, \ldots x_n) + \\ + \sum_{i=1}^{m} y_i [b_i - g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)], \tag{3.16}$$

где $y_1, y_2, ..., y_m$ — множители Лагранжа.

Определение 6. Точка $(X_0; Y_0) = (x_1^0; x_2^0; ..., x_n^0; y_1^0; y_2^0; ..., y_m^0)$ называется *седловой точкой функции Лагранжа,* если

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1^0; y_2^0; \ldots y_m^0) \le L(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, \\ y_1^0; y_2^0; y_m^0) \le (x_1^0; x_2^0; \ldots, x_n^0; y_1, y_2, \ldots, y_m)$$

для всех $x_j \ge 0$ $(j = \overline{1, n})$ и $y_i \ge 0$ $(i = \overline{1, m})$.

Теорема 3.2 (теорема Куна–Таккера). *Для задачи выпуклого программирования* (10.11)–(10.13), *множество допустимых решений которой обладает свойством регулярности,* $X_0 = (x_1^0;\ x_2^0;\ \ldots\ x_n^0)$ *является оптимальным планом тогда и только тогда, когда существует такой вектор* $Y_0 = (y_1^0 y_2^0 \ldots\ y_m^0)$ $(y_i^0 > 0)$, *что* $(X_0; Y_0)$ *— седловая точка функции Лагранжа.*

Если предположить, что целевая функция f и функция g_i непрерывно дифференцируемы, то теорема Куна–Таккера может быть дополнена аналитическими выражениями, определяющими необходимые и достаточные условия того, чтобы точка $(X_0; Y_0)$ была седловой точкой функции Лагранжа, т. е. являлась решением задачи выпуклого программирования. Эти выражения имеют следующий вид:

$$\frac{dL_0}{dx_j} \le 0; \tag{3.17}$$

$$x_j^0 \frac{\partial L_0}{\partial x_j} = 0 \quad (j = \overline{1, n}); \tag{3.18}$$

$$x_j^0 \ge 0; \tag{3.19}$$

$$\frac{\partial L_0}{\partial y_i} > 0; \tag{3.20}$$

$$y_i^0 \frac{\partial L_0}{\partial y_i} = 0 \quad (i = \overline{1, m}); \tag{3.21}$$

$$y_i^0 > 0; \tag{3.22}$$

где $\frac{\partial L_0}{\partial x_j}$ и $\frac{\partial L_0}{\partial y_i}$ — значения соответствующих частных производных функции Лагранжа, вычисленных в седловой точке. Всем отмеченным выше требованиям, позволяющим записать необходимые и достаточные условия для седловой точки $(X_0; Y_0)$ функции Лагранжа в виде выражений (3.17)–(3.22), удовлетворяет сформулированная ниже задача квадратичного программирования.

Определение 7. *Квадратичной формой* относительно переменных x_1, x_2, ..., x_n называется числовая функция от этих переменных, имеющая вид

$$F = c_{11}x_1x_1 + c_{12}x_1x_2 + c_{13}x_1x_3 + \ldots + c_{21}x_2x_1 + c_{22}x_2x_2 + \ldots = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{kj}x_kx_j.$$

Определение 8. Квадратичная форма F называется *положительно (отрицательно)-определенной,* если $F(X) > 0$ $[F(X) < 0]$ для всех значений переменных $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$, кроме $X = 0$.

Определение 9. Квадратичная форма F называется *положительно (отрицательно)-полуопределенной,* если $F(X) \geq 0$ $[F(X) \leq 0)$ для любого набора значений переменных $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ и, кроме того, существует такой набор переменных $X' = (x'_2\ x'_2 \ldots; x'_n)$, где не все значения переменных одновременно равны нулю, что $F(X') = 0$.

Теорема 3.3. *Квадратичная форма является выпуклой функцией, если она положительно-полуопределенная, и вогнутой функцией, если она отрицательно-полуопределенная.*

Определение 10. Задача, состоящая в определении максимального (минимального) значения функции

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} d_j x_j + \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{kj} x_k x_j \tag{3.23}$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \ (i = \overline{1, m}), \tag{3.24}$$

$$x_j \geq 0 \ (j = \overline{1, n}), \tag{3.25}$$

где $\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{kj} x_k x_i$ — отрицательно (положительно) — полуопределенная квадратичная форма, называется *задачей квадратичного программирования.*

Для задачи квадратичного программирования функция Лагранжа запишется в виде

$$L = \sum_{j=1}^{n} d_j x_j + \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{kj} x_k x_j + y_i (b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j).$$

Если функция L имеет седловую точку $(X_0; Y_0) = (x_1^0; x_2^0; ..., x_n^0; y_1^0; y_2^0; \ldots y_m^0)$, то в этой точке выполняются условия (3.17)–(3.22). Вводя дополнительные переменные v_j, $(j = \overline{1, n})$ и w_i $(i = \overline{1, m})$, обращающие неравенства (3.17) и (3.20) в равенства, перепишем выражения (3.17)–(3.22), записанные для задачи квадратичного программирования, следующим образом:

$$\frac{\partial L_0}{\partial x_j} + v_j = 0 \quad (j = \overline{1, n}); \tag{3.26}$$

$$\frac{\partial L_0}{\partial y_i} - w_i = 0 \quad (i = \overline{1, m}); \tag{3.27}$$

$$x_j^0 v_j = 0, \tag{3.28}$$

$$y_i^0 w_i = 0, \tag{3.29}$$

$$x_j^0 > 0, \;\; v_j > 0, \;\; y_i^0 > 0, \;\; w_i > 0 \;\; (j = \overline{1, n};\; i = \overline{1, m}). \tag{3.30}$$

3.5.2. Алгоритм решения задачи квадратичного программирования

Для решения задачи квадратичного программирования (3.23)–(3.25) нужно определить неотрицательное решение систем линейных уравнений (3.26) и (3.27), удовлетворяющее условиям (3.28) и (3.29). Это решение можно найти, например, с помощью метода искусственного базиса (глава 1), примененного для нахождения максимального значения функции $F = -\sum My_i$, при условиях (3.26), (3.27), (3.30) с учетом (3.28) и (3.29), где y_i — искусственные переменные, введенные в уравнения (3.26) и (3.27).

Используя метод искусственного базиса и дополнительно учитывая условия (3.28) и (3.29), после конечного числа шагов решения либо установим неразрешимость исходной задачи, либо получим оптимальное решение.

Процесс нахождения решения задачи квадратичного программирования включает следующие этапы:

1. Составляют функцию Лагранжа.
2. Записывают в виде выражений (3.26)–(3.30) необходимые и достаточные условия существования седловой точки для функции Лагранжа.
3. Используя метод искусственного базиса, либо устанавливают отсутствие седловой точки для функции Лагранжа, либо находят ее координаты.
4. Записывают оптимальное решение исходной задачи и находят значение целевой функции.

Пример 10. Найти максимальное значение функции

$$f = 2x_1 + 4x_2 - x_1^2 - 2x_2^2 \tag{3.31}$$

при условиях

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8, \\ 2x_2 - x_2 \le 12, \end{cases} \tag{3.32}$$

$$x_1 x_2 \ge 0. \tag{3.33}$$

Решение. Функция f является вогнутой, так как представляет собой сумму линейной функции $f_1 = 2x_1 + 4x_2$ (которую можно рассматривать как вогнутую) и квадратичной формы $f_2 = -x_1^2 - x_2^2$, которая является отрицательно-определенной и, следовательно, также вогнутой. Система ограничений задачи включает только лишь линейные неравенства. Следовательно, можно воспользоваться теоремой Куна–Таккера.

Составим функцию Лагранжа

$$L = 2x_1 + 4x_2 - x - 2x + y_1\,(8 - x_1 - 2x_2) + y_2\,(12 - 2x_1 + x_2)$$

и запишем, используя (3.26)–(3.30), необходимые и достаточные условия существования седловой точки построенной функции:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 2 - 2x_1 - y_1 - 2y_2 \le 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 4 - 4x_2 - 2y_1 + y_2 \le 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial y_1} = 8 - x_1 - 2x_2 > 0, \tag{3.34}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y_2} = 12 - 2x_1 + x_2 > 0,$$

$$x_1 \frac{\partial L}{\partial x_1} = x_1(2 - 2x_1 - y_1 - 2y_2) = 0,$$

$$x_2 \frac{\partial L}{\partial x_2} = x_2(4 - 4x_2 - 2y_1 + y_2) = 0, \tag{3.35}$$

$$y_1 \frac{\partial L}{\partial y_1} = y_1(8 - x_1 - 2x_2) = 0,$$

$$y_2 \frac{\partial L}{\partial y_2} = y_2(12 - 2x_1 + x_2) = 0,$$

$$x_1, \ \ x_2, \ \ y_1, \ \ y_2 > 0. \tag{3.36}$$

Систему линейных неравенств (3.34) перепишем следующим образом:

$$\begin{cases} 2x_1 + y_1 + 2y_2 > 2, \\ 4x_2 + 2y_1 - y_2 > 4, \\ x_1 + 2x_2 \le 8, \\ 2x_1 - x_2 \le 12. \end{cases} \tag{3.37}$$

Вводя теперь дополнительные неотрицательные переменные u_1, u_2, w_1 и w_2, обращающие неравенства (3.34) в равенства, получим

$$\begin{cases} 2x_1 + y_1 + 2y_2 - v_1 = 2, \\ 4x_2 + 2y_1 - y_2 - v_2 = 4, \\ x_1 + \ \ 2x_2 + w_1 = 8, \\ 2x_1 - x_2 + w_2 = 12. \end{cases} \tag{3.38}$$

$$x_1, \ \ x_2, \ \ y_1, \ \ y_2 v_1, \ \ v_2, \ \ w_1 w_2 > 0. \tag{3.39}$$

Учитывая равенства (3.38), можно записать:

$$v_1 x_1 = 0, \ \ v_2 x_2 = 0, \ \ w_1 y_1 = 0, \ \ w_2 y_2 = 0. \tag{3.40}$$

Для нахождения базисного решения системы линейных уравнений (3.38) воспользуемся методом искусственного базиса. В первое и второе уравнения системы соответственно добавим дополнительную неотрицательную переменную z_1 и z_2 и рассмотрим задачу линейного программирования, состоящую в определении максимального значения функции

$$f = -Mz_1 - Mz_2 \tag{3.41}$$

при условиях

$$\begin{cases} 2x_1 + y_1 + 2y_2 - v_1 + z_1 = 2, \\ 4x_2 + y_1 - y_2 - v_2 + z_2 = 4, \\ x_1 + \ \ 2x_2 + w_1 = 8, \\ 2x_1 + x_2 + w_2 = 12, \end{cases} \tag{3.42}$$

$$x_1,\ x_2,\ y_1,\ y_2 v_1,\ v_2,\ w_1 w_2 z_1,\ z_2 > 0. \qquad (3.43)$$

Решая задачу (3.41)–(3.43), находим допустимое базисное решение системы линейных уравнений (3.42) (табл. 3.2):

Таблица 3.2

№ п/п	C_i	БП	0	0	0	0	0	0	$-M$	$-M$	0	0	f
			x_1	x_2	Y_1	y_2	v_1	V_2	z_1	z_2	w_1	w_2	
1	$-M$	z_1	2	0	1	2	–1	0	1	0	0	0	2
2	$-M$	z_2	0	4	2	–1	0	–1	0	1	0	0	4
3	0	w_1	1	2	0	0	0	0	0	0	1	0	8
4	0	w_2	2	–1	0	0	0	0	0	0	0	1	12
		Δ_j	–2	–4	–3	–1	1	1	–1	–1	0	0	–6
1	$-M$	Z_1	2	0	1	2	–1	0	1	0	0	0	2
2	0	X_2	0	1	1/2	–1/4	0	–1/4	0	1/4	0	0	1
3	0	W_1	1	0	–1	1/2	0	1/2	0	–1/2	1	0	6
4	0	W_2	2	0	1/2	–1/4	0	–1/4	0	1/4	0	1	13
		Δ_j	–2	0	–1	–2	1	0	–1	0	0	0	–2
1	0	X_1	1	0	1/2	1	–1/2	0	1/2	0	0	0	1
2	0	X_2	0	1	1	–1/2	0	–1/2	0	1/2	0	0	2
3	0	W_1	0	0	–3/2	–1/2	1/2	1/2	–1/2	–1/2	1	0	5
4	0	W_2	0	0	–1/2	–1/2	1	–1/4	–1	1/4	0	1	11
		Δ_j	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0

$$x_1,\ x_2,\ y_1,\ y_2 v_1,\ v_2, w_1\ w_2 > 0.$$

$$x_1^0 = 1;\ x_2^0 = 1;\ w_1 = 5;\ w_2 = 11;\ y_1^0 = y_2^0 = v_1 = v_2 = 0.$$

Так как $x_1^0 v_1 = 0$; $x_2^0 v_2 = 0$; $y_1^0 w_1 = 0$; $y_2^0 w_2 = 0$; то $(X_0; Y_0) = (1; 1; 0; 0)$ является седловой точкой функции Лагранжа для исходной задачи. Следовательно, $x_{\text{опт}} = (1; 1)$ — оптимальный план исходной задачи и $f_{\max} = 3$.

Глава 4

Элементы теории игр

4.1. Основные понятия и определения

В экономике иногда приходится сталкиваться с ситуацией, когда при наличии многих участников эффективность решения одного из них зависит от того, какие решения приняли другие участники. Например, доход предприятия от продажи изделия зависит не только от установленной на него цены, но и от количества купленных покупателем изделий. Или, при выборе ассортимента товаров, выпускаемых предприятием, нужно учитывать, какой ассортимент товаров выпускают другие предприятия.

Все ситуации, когда эффективность действия одного из участников зависит от действий других, можно разбить на два типа: интересы участников совпадают и они могут договориться о совместных действиях; интересы участников не совпадают. В этих случаях может оказаться невыгодным сообщать другим участникам свои решения, так как кто-нибудь из них сможет воспользоваться знанием чужих решений и получит больший выигрыш за счет других участников. Ситуации такого типа называются конфликтными. Построением математических моделей конфликтных ситуаций и разработкой методов решения возникающих в этих ситуациях задач занимается *теория игр*.

Математическая теория игр ведет свое начало от анализа салонных, карточных, спортивных игр.

Впервые теория игр была систематически изложена Дж. Фон Нейманом и О. Моргенштерном в 1944 г. Их публикация содержала в основном экономическую ситуацию, которую легко описать в численной форме.

Уже во время Второй мировой войны теория игр была применена в военном деле для исследования стратегических решений. Во второй половине XX в. главное внимание в теории игр стало уделяться ее экономическим приложениям.

В игре могут сталкиваться интересы двух или нескольких противников, поэтому игры разделяются на *парные* и *множественные*. Если во множественной игре интересы игроков совпадают, то они могут объединяться, создавая коалиции. Такие игры называются *коалиционными*. Коалиции начинают выступать как отдельные игроки. После того как определен выигрыш в игре, коалиции могут распадаться для дележа выигрыша между отдельными игроками методами теории игр.

Игры могут быть *бескоалиционными*, когда целью каждого участника является получение максимального индивидуального выигрыша.

Игры могут быть *кооперативными* и *некооперативными*. Кооперативные — игры с ненулевой суммой, в которых игроки могут принимать решения по согласованию друг с другом, могут вступать в коалиции. Некооперативные игры — игры с числом участников не менее трех, в которых они могут принимать решения независимо друг от друга, так как согласование действий запрещено правилами игры.

Задачей теории игр является выработка рекомендаций для игроков, т. е. определение для них оптимальной стратегии. *Стратегией игрока* называется система правил, однозначно определяющих поведение игрока на каждом ходе в зависимости от ситуации, сложившейся в процессе игры. *Оптимальной* называется стратегия, которая при многократном повторении игры обеспечивает данному игроку максимально возможный средний выигрыш. Количество стратегий у каждого игрока может быть конечным или бесконечным, в зависимости от этого игры подразделяются на конечные и бесконечные.

Рассмотрим простейшую математическую модель *конечной конфликтной ситуации*, когда имеется два участника и когда выигрыш одного равен проигрышу другого. Такая модель называется *антагонистической игрой двух лиц с нулевой суммой*.

В игре участвуют первый и второй игроки, каждый из них может записать независимо от другого цифры 1, 2 и 3. Если разность между цифрами, записанная игроками, положительна, то первый игрок выигрывает количество очков, равное разности между цифрами, и наоборот, если разность отрицательна, то выигрывает второй игрок. Если разность равна нулю, то игра заканчивается вничью.

Пусть у первого игрока три стратегии (варианта действия): A_1 (записать 1), A_2 (записать 2), A_3 (записать 3); у второго игрока также три стратегии: B_1, B_2, B_3 (табл. 4.1).

Задача первого игрока — максимизировать свой выигрыш. Задача второго игрока — минимизировать свой проигрыш или минимизировать выигрыш первого игрока.

Таблица 4.1

	$B_1 = 1$	$B_2 = 2$	$B_3 = 3$
$A_1 = 1$	0	–1	–2
$A_2 = 2$	1	0	–1
$A_3 = 3$	2	1	0

Игру можно представить в виде матрицы, в которой строки — стратегии первого игрока, столбцы — стратегии второго игрока, а элементы матрицы — выигрыши первого игрока. Такую матрицу называют *платежной.*

Для данного примера платежная матрица имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{3\times 3}.$$

В общем случае парную игру с нулевой суммой можно записать платежной матрицей

$$(a_{ij})_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n}.$$

Задача каждого из игроков — найти наилучшую стратегию игры, при этом предполагается, что противники одинаково разумны и каждый из них делает все, чтобы получить наибольший доход.

Найдем наилучшую стратегию первого игрока: минимальное число a_{ij} в каждой строке обозначим α_i $(i = \overline{1, m})$,

$$\alpha_i = \min a_{ij}.$$

Зная α_i, т. е. минимальные выигрыши при различных стратегиях A_i, первый игрок выберет ту стратегию, для которой α_i максимально. Обозначим это максимальное значение — α, тогда

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij}.$$

Величина α — гарантированный выигрыш, который может обеспечить себе первый игрок, называется *нижней ценой игры* (максимином).

Аналогично для определения наилучшей стратегии второго игрока найдем максимальные значения выигрыша по столбцам, и выбрав из них минимальное значение, получим:

$$\beta = \min_j \max_i a_{ij},$$

где β — *верхняя цена игры* (минимакс).

Если второй игрок будет придерживаться своей минимаксной стратегии, то он гарантирован, что в любом случае проиграет не больше β.

Для матричной игры справедливо неравенство

$$\alpha \le \beta.$$

Если $\alpha = \beta$, то такая игра называется *игрой с седловой точкой*, а пара оптимальных стратегий ($A_{i\text{опт}}$, $B_{j\text{опт}}$) — *седловой точкой матрицы*. В этом случае элемент $a_{ij} = v$ называется *ценой игры*, является одновременно минимальным в i-й строке и j-м столбце.

Если игра имеет седловую точку, то говорят, что она решается в чистых стратегиях.

Найдем решение игры рассмотренного выше примера:

$$\alpha = \max \alpha_i = \max(-2, -1, 0) = 0,$$

$$\alpha = \alpha_3 \text{ — нижняя цена игры.}$$

$$\beta = \min \beta_j = \min(2, 1, 0) = 0,$$

$$\beta = \beta_3 \text{ — верхняя цена игры,}$$

так как $\alpha = \beta = 0$, матрица игры имеет седловую точку.

Оптимальная стратегия первого игрока — A_3 , второго — B_3. Из табл. 4.1 видно, что отклонение первого игрока от оптимальной стратегии уменьшает его выигрыш, а отклонение второго игрока от B_3 увеличивает его проигрыш.

Если платежная матрица не имеет седловой точки, т. е. $\alpha < \beta$, то поиск решения игры приводит к применению сложной стратегии, состоящей в случайном применении двух и более стратегий с определенными частотами. Такая сложная стратегия называется *смешанной*.

В игре, матрица которой имеет размерность $m \times n$, стратегии первого игрока задаются наборами вероятностей $\bar{x} = (x_1, x_2, ..., x_m)$, с которыми игрок применяет свои чистые стратегии. Эти наборы можно рассмотреть как m-мерные векторы, для координат которых

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1,\ \ x_i \geq 0,\ \ i = \overline{1, m}.$$

Аналогично для второго игрока наборы вероятностей определяют n — мерные векторы $\bar{y} = (y_1, y_2, ..., y_n)$, для координат которых

$$\sum_{j=1}^{n} y_i = 1,\ \ y_j \geq 0,\ \ j = \overline{1, n}.$$

Выигрыш второго игрока при использовании смешанных стратегий определяют как математическое ожидание выигрыша, он равен

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j.$$

В основной теореме теории игр утверждается, что каждая конечная игра имеет, по крайней мере, одно решение, возможно, в области смешанных стратегий.

Применение оптимальной стратегии позволяет получить выигрыш, равный цене игры: $a \leq v \leq b$.

Применение первым игроком оптимальной стратегии $\bar{x}_{i\text{опт}}$ должно обеспечить ему при любых действиях второго игрока выигрыш не меньше цены игры. Поэтому выполняется соотношение

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_{i\text{опт}} \leq v.$$

Аналогично для второго игрока оптимальная стратегия $\bar{y}_{j\text{о•т}}$ должна обеспечить при любых стратегиях первого игрока проигрыш, не превышающий цену игры, т. е. справедливо соотношение

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_{j\text{опт}} \geq v.$$

Если платежная матрица не содержит седловой точки, то задача определения смешанной стратегии тем сложнее, чем больше размерность матрицы. Поэтому матрицы большой размерности целесообразно упростить, уменьшив их размерность путем вычеркивания дублирующих (одинаковых) и заведомо не выгодных стратегий. Рассмотрим игру, представленную платежной матрицей:

$$\begin{pmatrix} 7 & 6 & 5 & 4 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 6 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}_{4\times 5}$$

$$\alpha = \max(2, 2, 3, 2) = 3,$$

$$\beta = \min(7, 6, 6, 4, 5) = 4, \ \alpha \neq \beta.$$

Все элементы A_2 меньше A_3, т. е. A_2 заведомо невыгодна для первого игрока, и A_2 можно исключить. Все элементы A_4 меньше A_3, исключаем A_4.

Для второго игрока: сравнивая B_1 и B_4, исключаем B_1; сравнивая B_2 и B_4, исключаем B_2; сравнивая B_3 и B_4, исключаем B_3. В результате преобразований получим матрицу

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}_{2\times 2}.$$

Теория игр находится в тесной связи с линейным программированием, так как каждая конечная игра двух лиц с нулевой суммой может быть представлена как задача линейного программирования и решена симплексным методом, и наоборот, каждая задача линейного программирования может быть представлена как конечная игра двух лиц с нулевой суммой.

4.2. Графическое решение игр

Графический метод применим к играм, в которых хотя бы один игрок имеет только две стратегии (табл. 4.2).

Рассмотрим игру $(2 \times n)$.

Таблица 4.2

		Второй игрок			
		y_1	y_2	...	Y_n
Первый игрок	x_1	a_{11}	a_{12}	...	A_{1n}
	$x_2 = 1 - x_1$	a_{21}	a_{22}	...	A_{2n}

Предполагаем, что игра не имеет седловой точки.

Обозначим: x_1 — вероятность применения первым игроком 1 стратегии, x_2 — вероятность применения первым игроком 2 стратегии, причем $x_2 = 1 - x_1$; y_1 — вероятность применения вторым игроком 1 стратегии, y_2 — вероятность применения вторым игроком 2 стратегии и т. д., y_n — вероятность применения вторым игроком n-й стратегии.

Ожидаемый выигрыш первого игрока при применении вторым 1 стратегии составит

$$a_{11}x_1 + a_{21}x_2 = a_{11}x_1 + a_{21}(1 - x_1) = a_{11}x_1 + a_{21} - a_{21}x_1 = (a_{11} - a_{21})\,x_1 + a_{21}.$$

Аналогично найдем ожидаемые выигрыши первого игрока при применении вторым игроком 2, 3, . . . , n стратегий. Полученные данные поместим в табл. 4.3.

Таблица 4.3

Чистые стратегии второго игрока	Ожидаемые выигрыши первого игрока
1	$(a_{11} - a_{21})\,x_1 + a_{21}$
2	$(a_{12} - a_{22})\,x_1 + a_{22}$
...	. . . .
N	$(a_{1n} - a_{2n})\,x_1 + a_{2n}$

Из таблицы видно, что ожидаемый выигрыш первого игрока линейно зависит от x_1. На оси X_1 построим прямые ожидаемых выигрышей первого игрока.

Первый игрок должен выбирать такие стратегии, чтобы максимизировать свой минимальный ожидаемый выигрыш. Поэтому оптимальная стратегия первого игрока определяется как точка пересечения прямых, максимизирующих его минимальный ожидаемый выигрыш.

Аналогично находим оптимальную стратегию второго игрока. Она определяется как точка пересечения прямых, минимизирующих его максимально ожидаемые проигрыши.

Пример 1. Рассмотрим представленную выше игру, заданную платежной матрицей:

$$\begin{pmatrix} 7 & 6 & 5 & 4 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 6 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}_{4\times 5}.$$

Найти оптимальные стратегии игроков и цену игры.

Решение. Обозначим: x_1 — вероятность применения первым игроком стратегии 1;

x_2, x_3, x_4 — вероятность использования первым игроком 2, 3, 4 стратегий соответственно, причем $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$;

y_1 — вероятность применения вторым игроком 1 стратегии;

y_2, y_3, y_4, y_5 — вероятность использования вторым игроком 2, 3, 4, 5 стратегий соответственно, причем $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 0$.

Платежная матрица была упрощена путем вычеркивания дублирующих, заведомо невыгодных стратегий. Поэтому $x_2 = x_4 = y_1 = y_2 = y_3 = 0$ и матрица имеет вид

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}_{2\times 2}.$$

Составим табл. 4.4.

Таблица 4.4

Чистые стратегии второго игрока	Ожидаемые выигрыши первого игрока
1	$(4 - 3)\,x_1 + 3 = x_1 + 3$
2	$(2 - 5)\,x_1 + 5 = -3x_1 + 5$

Найдем решение игры графическим методом. На оси X_1 разместим точки $x_1 = 0$ и $x_1 = 1$, через которые проведем прямые, перпендикулярные оси X_1. Подставляя $x_1 = 0$ и $x_1 = 1$ в выражение $x_1 + 3$, найдем значения 3 и 4, которые отложим на соответствующих перпендикулярных прямых. Соединив эти точки, получим прямую $x_1 + 3$.

Аналогично построим прямую $-3x_1 + 5$.

Оптимальная стратегия первого игрока определится как точка пересечения прямых $x_1 + 3$ и $-3x_1 + 5$.

$$x_1 + 3 = -3x_1 + 5,\ x_1 = 1/2,\ x_3 = 1 - x_1 = 1/2.$$

Цена игры $v = x_1 + 3 = 1/2 + 3 = 7/2$.

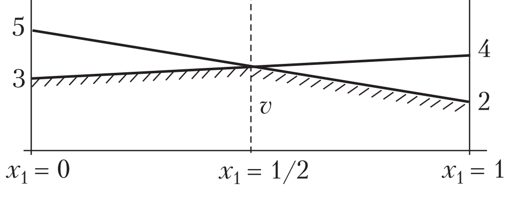


Рис. 4.1

Оптимальная стратегия первого игрока:

$\bar{x}_{\text{опт}} = (1/2,\ 0,\ 1/2,\ 0)$, при этом цена игры $v = 7/2$.

Найдем оптимальную стратегию для второго игрока.

Таблица 4.5

Чистые стратегии первого игрока	Ожидаемые проигрыши второго игрока
1	$(4 - 2)\,y_4 + 2 = 2y_4 + 2$
2	$(3 - 5)\,y_4 + 5 = -2y_4 + 5$

$$2y_4 + 2 = -2y_4 + 5,\ y_4 = 3/4,$$

$$y_5 = 1 - y_4 = 1/4,$$

$$v = 2y_1 + 2 = 3/2 + 2 = 7/2.$$

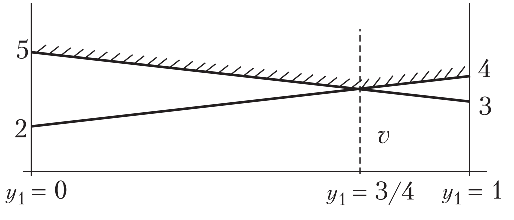


Рис. 4.2

Оптимальная стратегия второго игрока:

$$\bar{y}_{\text{опт}} = (0,\ 0,\ 0,\ 3/4,\ 1/4),\ \text{при этом цена игры } v = 7/2.$$

Ответ. Оптимальная стратегия первого игрока:

$$\bar{x}_{\text{опт}} = (1/2,\ 0,\ 1/2,\ 0),\ \text{при этом цена игры } v = 7/2.$$

Оптимальная стратегия второго игрока:

$$\bar{y}_{\text{опт}} = (0,\ 0,\ 0,\ 3/4,\ 1/4),\ \text{при этом цена игры } v = 7/2.$$

Пример 2. Найдем решение игры вида $(2 \times n)$, заданной платежной матрицей:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & 2 & 6 \end{pmatrix}_{2\times 4}.$$

Решение. $\alpha = \max(-1,\ 2) = 2$, $\beta = \min(4,\ 5,\ 3,\ 6) = 3$, $2 \le v \le 3$.

Таблица 4.6

Чистые стратегии второго игрока	Ожидаемые выигрыши первого игрока
1	$-2x_1 + 4$
2	$-4x_1 + 5$
3	$x_1 + 2$
4	$-7x_1 + 6$

$$-4x_1 + 5 = x_1 + 2,\ x_1 = 3/5,$$

$$x_2 = 1 - x_1 = 2/5,$$

$$v = x_1 + 2 = 3/5 + 2 = 13/5.$$

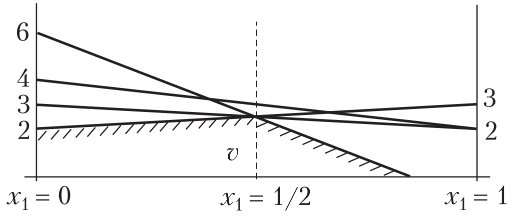


Рис. 4.3

Оптимальное решение первого игрока:

$\bar{x}_{\text{опт}} = (3/5,\ 2/5)$, при этом цена игры составляет $v = 13/5$.

Найдем оптимальное решение второго игрока.

Из рис. 4.3 следует, что оптимальная стратегия первого игрока определяется как точка пересечения прямых $-4x_1 + 5$ и $x_1 + 2$, соответствующих 2-й и 3-й чистым стратегиям второго игрока (см. табл. 4.6), поэтому $y_1 = y_4 = 0$, а $y_3 = 1 - y_2$.

Таблица 4.7

Чистые стратегии первого игрока	Ожидаемые проигрыши второго игрока
1	$-2y_2 + 3$
2	$3y_2 + 2$

$$-2y_2 + 3 = 3y_2 + 2,\ y_2 = 1/5,$$

$$y_3 = 1 - 1/5 = 4/5.$$

$$v = 3y_2 + 2 = 3/5 + 2 = 13/5.$$

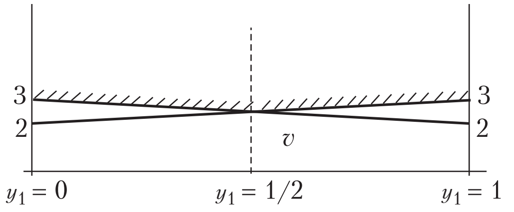


Рис. 4.4

Оптимальное решение второго игрока:

$$\bar{y}_{\text{опт}} = (0,\ 1/5,\ 4/5,\ 0), \text{ при этом цена игры } v = 13/5\ .$$

Ответ.

$$\bar{x}_{\text{опт}} = (1/2,\ 1/2),\ \bar{y}_{\text{опт}} = (0,\ 1/2,\ 1/2,\ 0),\ v = 5/2.$$

Пример 3. Рассмотрим игру вида $(m \times 2)$, заданную платежной матрицей:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 3 \\ 3 & 2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}_{4 \times 2}$$

$$\alpha = \max\,(2,\ 2,\ 2,\ -2) = 2,$$

$$\beta = \min\,(3,\ 6) = 3,$$

$$2 \le v \le 3.$$

Решение. Пусть y_1 и y_2 (причем $y_2 = 1 - y_1$) — смешанные стратегии второго игрока.

Таблица 4.8

Чистые стратегии первого игрока	Ожидаемые проигрыши второго игрока
1	$-2y_1 + 4$
2	$-y_1 + 3$
3	$-y_1 + 2$
4	$-8y_1 + 6$

$$-2y_1 + 4 = y_1 + 2,\ y_1 = 2/3,$$

$$y_2 = 1 - y_1 = 1/3,$$

$$v = y_1 + 2 = 8/3.$$

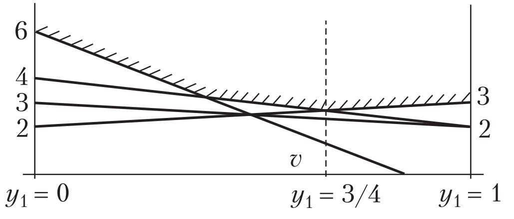


Рис. 4.5

Оптимальное решение второго игрока:

$$\bar{y}_{\text{опт}} = (2/3,\ 1/3), \text{ при этом цена игры } v = 8/3.$$

Прямые, пересекающиеся в минимаксной точке, соответствуют 1-й и 3-й чистым стратегиям первого игрока. Это означает, что $x_2 = x_4 = 0$. Следовательно, $x_1 = 1 - x_3$.

Таблица 4.9

Чистые стратегии второго игрока	Ожидаемые выигрыши первого игрока
1	$-x_1 + 3$
2	$2x_1 + 2$

$$-x_1 + 3 = 2x_1 + 2,\ x_1 = 1/3,$$

$$x_2 = 1 - x_1 = 2/3,$$

$$v = -x_1 + 3 = 8/3.$$

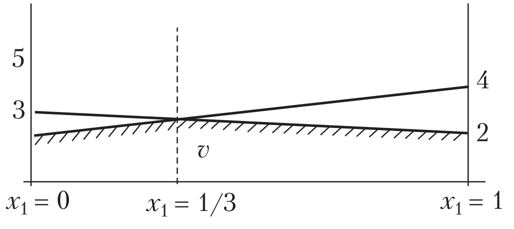


Рис. 4.6

Оптимальное решение первого игрока:

$$\bar{x}_{\text{опт}} = (1/3,\ 0,\ 2/3,\ 0),\ \text{при этом цена игры } v = 8/3.$$

Ответ. $\bar{x}_{\text{опт}} = (1/3,\ 0,\ 2/3,\ 0)$, $\bar{y}_{\text{опт}} = (2/3,\ 1/3)$, $v = 8/3$.

4.3. Решение матричных игр симплексным методом

Теория игр находится в тесной связи с линейным программированием, так как каждая конечная игра двух лиц с нулевой суммой может быть представлена как задача линейного программирования и решена симплексным методом, и наоборот, каждая задача линейного программирования может быть представлена как конечная игра двух лиц с нулевой суммой.

Дана игра двух лиц, заданная платежной матрицей

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m \times n}.$$

Составим математическую модель для первого игрока, исходя из чистых стратегий второго игрока $L(x) = v \to \max$ при ограничениях

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \ldots + a_{m1}x_m \le v, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{m2}x_m \le v, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \ldots + a_{mn}x_m \ge v, \\ x_1 + x_2 + \ldots + x_m = 1, \end{cases}$$

$$x_i \ge 0,\ \ i = \overline{1, m}.$$

Математическую модель можно упростить, разделив все $(n + 1)$ ограничения на v. Это возможно при $v \ne 0$. При $v = 0$ рекомендуется прибавить любое положительное число ко всем элементам платежной матрицы, что гарантирует положительность значения модифицированной игры. Действительное значение игры получается вычитанием из модифицированного значения этого положительного числа. Если $v < 0$, то надо сменить знаки неравенств. Полагая $v > 0$, систему ограничений можно записать:

$$\begin{cases} a_{11}x_1/v + a_{21}x_2/v + \ldots + a_{m1}x_m/v \geq 1, \\ a_{12}x_1/v + a_{22}x_2/v + \ldots + a_{m2}x_m/v \geq 1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{1n}x_1/v + a_{2n}x_2/v + \ldots + a_{mn}x_m/v \geq 1, \end{cases}$$

$$x_1/v + x_2/v + \ldots + x_m/v = 1/v.$$

Полагая $X_i = x_i/v$ и если $v \to \max$, то $1/v \to \min$, получим задачу линейного программирования вида $L(X) = X_1 + X_2 + \ldots + X_m \to \min$ при ограничениях:

$$\begin{cases} a_{11}X_1 + a_{21}X_2 + \ldots + a_{m1}X_m \geq 1, \\ a_{12}X_1 + a_{22}X_2 + \ldots + a_{m2}X_m \geq 1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{1n}X_1 + a_{2n}X_2 + \ldots + a_{mn}X_m \geq 1, \end{cases}$$

$$X_i \geq 0,\ i = \overline{1, m}.$$

Аналогично, исходя из чистых стратегий первого игрока или по правилам составления двойственных задач, принимая математическую модель первого игрока как исходную, математическая модель второго игрока записывается в виде $S(\overline{Y}) = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n \to \max$ при ограничениях:

$$\begin{cases} a_{11}Y_1 + a_{12}Y_2 + \ldots + a_{1n}Y_n \leq 1, \\ a_{21}Y_1 + a_{22}Y_2 + \ldots + a_{2n}Y_n \leq 1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{m1}Y_1 + a_{m2}Y_2 + \ldots + a_{mn}Y_n \leq 1, \end{cases}$$

$$Y_j \geq 0,\ \ j = \overline{1, n}.$$

где $S(\overline{Y})_{\max} = L(\overline{X})_{\min}\ 1/v,\ Y_j = y_j/v$.

Пример 4. Торговая фирма разработала несколько вариантов плана продажи товаров на предстоящей ярмарке с учетом меняющейся конъюнктуры рынка и спроса покупателей. Получающиеся от их возможных сочетаний показатели дохода представлены в табл. 4.10.

Определить оптимальный план продажи товаров.

Таблица 4.10

План продажи	Величина дохода, ден. ед.		
	K_1	K_2	K_3
$П_1$	8	4	2
$П_2$	2	8	4
$П_3$	1	2	8

Решение. Обозначим вероятность применения торговой фирмой стратегии $П_1$ — x_1, стратегии $П_2$ — x_2, $П_3$ — x_3. Вероятность использования стратегии K_1 — y_1, стратегии K_2 — y_2, K_3 — y_3.

Для первого игрока (торговой фирмы) математическая модель задачи имеет вид

$$L(\overline{X}) = X_1 + X_2 + X_3 \to \min$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} 8X_1 + 2X_2 + X_3 \geq 1, \\ 4X_1 + 8X_2 + 2X_3 \geq 1, \\ 2X_1 + 4X_2 + 8X_3 \geq 1, \end{cases}$$

$$X_i \geq 0, \ i = \overline{1, 3}.$$

где $x_i = X_i v$.

Для второго игрока (конъюнктуры рынка и спроса покупателей) математическая модель задачи имеет вид

$$S(\overline{Y}) = Y_1 + Y_2 + Y_3 \to \max$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} 8Y_1 + 4Y_2 + 2Y_3 \leq 1, \\ 2Y_1 + 8Y_2 + 4Y_3 \leq 1, \\ Y_1 + 2Y_2 + 8Y_3 \leq 1, \end{cases}$$

$$Y_j \geq 0, \ j = \overline{1, 3}.$$

Найдем оптимальное решение задачи для второго игрока симплексным методом. При этом последняя табл. 4.11 имеет следующий вид:

Таблица 4.11

c_j	БП	1	1	1	0	0	0	b_i
		Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6	
1	Y_1	1	0	0	1/7	–1/14	0	1/14
1	Y_2	0	1	0	–3/98	31/196	–1/14	11/196
1	Y_3	0	0	1	–1/98	–3/98	1/7	5/49
	Δ_i	0	0	0	5/49	11/196	1/14	45/196

Из таблицы следует, что $\overline{Y}_{\text{опт}} = (1/14, 11/196, 5/49)$, $S(\overline{Y})_{\max} = 45/196$.

Цена игры $v = 1/S(\overline{Y}) = 196/45$.

Так как $y_i = Y_i v$, то $y_1 = 14/45$, $y_2 = 11/45$, $y_3 = 20/45$.

Оптимальная стратегия второго игрока:

$$\overline{y}_{\text{опт}} = (14/45,\ 11/45,\ 20/45).$$

Стратегии первого игрока найдем из последней симплексной таблицы, используя метод соответствия переменных исходной и двойственной задачи. Получим

$$\overline{x}_{\text{опт}} = (20/45,\ 11/45,\ 14/45).$$

Таким образом, торговая фирма на ярмарке должна придерживаться стратегии $x_{\text{опт}} = (20/45, 11/45, 14/45)$, при этом она получит доход не менее $v = 196/45$ ден. ед.

4.4. Игры с «природой»

4.4.1. Основные понятия и критерии

В рассмотренных выше матричных играх предполагалось, что в них принимают участие два игрока, интересы которых противоположны. Поэтому действия каждого игрока направлены на увеличение выигрыша (уменьшение проигрыша). Однако в некоторых задачах, приводящихся к игровым, имеется неопределенность, вызванная отсутствием информации об условиях, в которых осуществляется действие (погода, покупательский спрос и т. д.). Эти условия зависят не от сознательных действий другого игрока, а от объективной действительности. Такие игры называются играми с «природой». Человек в играх с «природой» старается действовать осмотрительно, второй игрок (природа, покупательский спрос) действует случайно.

Условия игры задаются матрицей

$$(a_{ij})_{m \times n}.$$

Пусть игрок A имеет стратегии $A_1, A_2,..., A_m$, а природа — состояния B_1, B_2, ..., B_n. Наиболее простым является ситуация, когда известна вероятность p_j каждого состояния природы B_j. При этом, если учтены все возможные состояния, то

$$p_1 + p_2 + ... + p_j + ... + p_n = 1.$$

Если игрок A выбирает чистую стратегию A_i, то математическое ожидание выигрыша составит

$$p_1 a_{i1} + p_2 a_{i2} + ... + p_n a_{in}.$$

Наиболее выгодной будет та стратегия, при которой достигается

$$\max_i (p_1 a_{i1} + p_2 a_{i2} + \ldots + p_n a_{in}).$$

Если информация о состояниях природы мала, то можно применить принцип недостаточного основания Лапласа, согласно которому можно считать, что все состояния природы равновероятны

$$\max_i (a_{i1} + a_{i2} + \ldots + a_{in})/n,$$

т. е. стратегию, для которой среднее арифметическое элементов соответствующей строки максимальное.

Имеется ряд критериев, которые используются при выборе оптимальной стратегии. Рассмотрим некоторые из них.

1. *Критерий Вальде.* Рекомендуется применять максиминную стратегию. Она достигается из условия

$$\max_i \max_j a_{ij}.$$

и совпадает с нижней ценой игры. Критерий является пессимистическим, считается, что природа будет действовать наихудшим для человека способом.

2. *Критерий максимума.* Он выбирается из условия

$$\max_i \max_j a_{ij}.$$

Критерий является оптимистическим, считается, что природа будет наиболее благоприятна для человека.

3. *Критерий Гурвица.* Критерий рекомендует стратегию, определяемую по формуле

$$\max_i \{\alpha \min a_{ij} + (1-\alpha)\max_j a_{ij}\},$$

где α — степень оптимизма и изменяется в диапазоне $[0, 1]$.

Критерий придерживается некоторой промежуточной позиции, учитывающей возможность как наихудшего, так и наилучшего поведения природы. При $\alpha = 1$ критерий превращается в критерий Вальде, при $\alpha = 0$ — в критерий максимума. На α оказывает влияние степень ответственности лица, принимающего решение по выбору стратегии. Чем больше последствия ошибочных решений, больше желания застраховаться, тем α ближе к единице.

4. *Критерий Сэвиджа.* Суть критерия состоит в выборе такой стратегии, чтобы не допустить чрезмерно высоких потерь, к которым она может привести. Находится матрица рисков, элементы которой показывают, какой убыток понесет человек (фирма), если для каждого состояния природы он не выберет наилучшей стратегии.

Элемент матрицы рисков (r_{ij}) находится по формуле

$$r_{ij} = \max a_{ij} - a_{ij},$$

где $\max a_{ij}$ — максимальный элемент в столбце исходной матрицы.

Оптимальная стратегия находится из выражения:

$$\min_i \{\max_j (\max a_{ij} - a_{ij})\}.$$

При принятии решений в условиях неопределенности следует оценивать различные варианты с точки зрения нескольких критериев. Если рекомендации совпадают, можно с большей уверенностью выбрать наилучшее решение, если рекомендации противоречат друг другу, окончательное решение надо принимать с учетом его сильных и слабых сторон.

4.4.2. Применение игр с «природой» в экономике

Изменение конъюнктуры на потребительском рынке за счет сезонности лекарственных препаратов сказывается на выработке стратегий фармацевтических фирм. В условиях неопределенности рынка выбрать оптимальную стратегию практически невозможно, но с использованием математических методов, определенной направленности стратегического поведения фирмы можно приблизиться к получению максимальной прибыли в имеющихся условиях. Стратегия поведения на рынке в условиях неопределенности уменьшает фактор случайности, что позволяет с большей вероятностью прогнозировать получение прибыли предприятием.

Потребительский спрос и объем продаж лекарственных препаратов зависит от сезона. Замечено, что у некоторых препаратов пик спроса приходится на лето, у других — на весенне-осенний период, у третьих — на зиму. В связи с этим определенный интерес для фирмы представляет выработка оптимальной стратегии в переходные периоды. В качестве примера определим оптимальную стратегию поведения АО «Фармацевт».

Пример 5. Фирма «Фармацевт» — производитель медикаментов и биомедицинских изделий в регионе. Известно, что пик спроса на некоторые лекарственные препараты приходится на летний период (препараты сердечно-сосудистой группы, анальгетики), другие — на осенний и весенний периоды (антиинфекционные, противокашлевые).

Затраты на 1 усл. ед. продукции за сентябрь—октябрь составили: по первой группе (препараты сердечно-сосудистые и анальгетики) — 20 ден. ед.; по второй группе (антиинфекционные, противокашлевые препараты) — 15 ден. ед.

По данным наблюдений, проведенных за несколько последних лет службой маркетинга , установлено, что фирма может реализовать в течение рассматриваемых двух месяцев в условиях теплой погоды — 3050 усл. ед. продукции первой группы и 1100 усл. ед. продукции второй группы; а в условиях холодной погоды — 1525 усл. ед. продукции первой группы и 3690 усл. ед. второй группы.

В связи с возможными изменениями погоды ставится задача определить стратегию фирмы в выпуске продукции, обеспечивающую максимальный доход от реализации при цене продажи за 1 усл. ед. продукции первой группы 40 ден. ед. и второй группы — 30 ден. ед.

Решение. Фирма располагает двумя стратегиями:

A_1 — в этом году будет теплая погода;

A_2 — погода будет холодная.

Если фирма примет стратегию A_1 и в действительности будет теплая погода (стратегия природы B_1), то выпущенная продукция (3050 усл. ед. препаратов первой группы и 1100 усл. ед. второй группы) будет полностью реализована и доход составит:

$$3050\,(40 - 20) + 1100\,(30 - 15) = 77500 \text{ ден. ед.}$$

В условиях прохладной погоды (стратегия природы B_2) препараты второй группы будут проданы полностью, а первой группы только в количестве 1525 усл. ед., и часть препаратов останется нереализованной. Фирма получит доход:

$$1100\,(40 - 20) + 1525\,(30 - 15) - 20\,(3050 - 1100) = 5875 \text{ ден. ед.}$$

Аналогично, если фирма примет стратегию A_2 и в действительности будет холодная погода, то ее доход будет:

$$1525\,(40 - 20) + 3690\,(30 - 15) = 85850 \text{ ден. ед.}$$

При теплой погоде доход составит:

$$11525\,(40 - 20) + 1100\,(30\ -15) - (3690 - 1100)\,15 = 8150 \text{ ден. ед.}$$

Рассматривая фирму и погоду (покупательский спрос) в качестве двух игроков, получим платежную матрицу

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} B_1 & \quad B_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \end{array} & \begin{pmatrix} 77\,550 & 5875 \\ 8150 & 85\,850 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\alpha = \max\,(5875,\ 8150) = 8150 \text{ ден. ед.}$$

$$\beta = \min\ (77\,500,\ 85\,850) = 77500 \text{ ден. ед.}$$

Цена игры лежит в диапазоне 8150 ден. ед. $\leq v \leq$ 77 500 ден. ед.

Из платежной матрицы видно, что при всех условиях доход фирмы будет не меньше 8150 ден. ед., но если погодные условия совпадут с выбранной стратегией, то доход фирмы может составлять до 77 500 ден. ед.

Обозначим вероятность применения фирмой стратегии A_1 — x_1, A_2 — x_2, причем $x_1 = 1 - x_2$.

Решая игру графическим методом, получим: $\bar{x}_{\text{опт}}$ = (0,52; 0,48), при этом цена игры $v = 44\,212$ ден. ед.

Оптимальный план производства лекарственных препаратов составит:

$$0{,}52\,(3050;\ 1100) + 0{,}48\,(1525;\ 3690) = (2379;\ 2299).$$

Ответ. Таким образом, фирме целесообразно производить в течение сентября и октября 2379 усл. ед. препаратов первой группы и 2299 усл. ед. препаратов второй группы, тогда при любой погоде она получит доход не менее 44 212 ден. ед.

Если не представляется возможным изменить план производства фирмы, то для определения оптимальной стратегии фирмы используем критерии «природы».

1. Критерий Вальде.

$$\max\,(\min a_{ij}) = \max\,(5875,\ 8150) = 8150 \text{ ден. ед.},$$

фирме целесообразно использовать стратегию A_2.

2. Критерий максимума.

$$\max\,(\max a_{ij}) = \max\,(77\,500,\ 85\,850) = 85\,850 \text{ ден. ед.},$$

целесообразно использовать стратегию A_2.

3. Критерий Гурвица. Для определенности примем $\alpha = 0{,}4$, тогда для стратегии фирмы A_1

$$\alpha \max a_{ij} + (1 - \alpha) \min a_{ij} = 0{,}4 \cdot 77\,500 + (1 - 0{,}4)\ 5875 = 34525 \text{ ден. ед.}$$

Для стратегии A_2

$$\alpha \max a_{ij} + (1 - \alpha) \min a_{ij} = 0{,}4 \cdot 85\,850 + (1 - 0{,}4)\ 8150 = 39\,230 \text{ ден. ед.}$$

$$\max\,(34\,525,\ 39\,230) = 39\,230 \text{ ден. ед.},$$

фирме целесообразно использовать стратегию A_2.

4. Критерий Сэвиджа.

Максимальный элемент в первом столбце — 77 500, во втором столбце — 85 850.

Элементы матрицы рисков находятся из выражения:

$$r_{ij} = \max a_{ij} - a_{ij},$$

откуда $r_{11} = 77500 - 77500 = 0$, $r_{12} = 85850 - 5875 = 79975$, $r_{21} = 77500 - 8150 = 69350$, $r_{22} = 77500 - 77500 = 0$.

Матрица рисков имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 79975 \\ 69350 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\min\{\max(\max a_{ij} - a_{ij})\} = \min(79975, 69350) = 69350 \text{ ден. ед.},$$

целесообразно использовать стратегию A_2.

Следовательно, при использовании критериев «природы» фирме целесообразно применять стратегию A_2.

Следует отметить, что каждый из рассмотренных критериев не может быть признан вполне удовлетворительным для окончательного выбора решений, однако их совместный анализ позволяет более наглядно представить последствия принятия тех или иных управленческих решений.

При известном распределении вероятностей различных состояний природы критерием принятия решения является максимум математического ожидания выигрыша.

Пусть известно для рассматриваемой задачи, что вероятности теплой и холодной погоды равновероятны и равны 0,5. В этом случае оптимальная стратегия фирмы определяется:

$$\max\{(0{,}5 \cdot 77500 + 0{,}5 \cdot 5875), (0{,}5 \cdot 8150 + 0{,}5 \cdot 85850)\} = \\ = (41687{,}5; 47000) = 47000 \text{ ден. ед.}$$

Фирме целесообразно использовать стратегию A_2, т. е. рассчитывать свое поведение, ориентируясь на холодную погоду.

Таким образом, прогнозирование динамики экономической конъюнктуры с помощью экономико-математических методов позволяет найти оптимальную стратегию фирмы на рынке в переходные периоды, что способствует повышению эффективности ее деятельности в условиях неопределенности и риска.

4.5. Кооперативные игры

Игроки могут выигрывать и проигрывать одновременно, их интересы могут не быть полностью противоположными, а поведение игроков становится более разнообразным. Такая ситуация весьма характерна для рыночных отношений.

В игре с ненулевой суммой становится желательным координировать свои действия с партнером либо каким-то образом влиять на его действия. Игры с ненулевой суммой могут быть *кооперативными* (в сообществе) и *некооперативными* (принятие решений независимо друг от друга).

В случае некооперативных игр важным моментом является определение точек равновесия игры. Вообще понятие равновесия в теории игр шире понятия оптимизации и включает последнее в качестве частного случая. В общем случае пара стратегий $x_{\text{опт}}$ и $y_{\text{опт}}$ для игроков 1 и 2 называется *точкой равновесия по Нэшу*, если обоим игрокам невыгодно отклоняться от своей стратегии в одиночку, т. е.

$$a_1\,(x,\,y_{\text{опт}}) \le a_1\,(x_{\text{опт}}\,,\,y_{\text{опт}}),\; a_1\,(x_{\text{опт}},\,y) \le a_1\,(x_{\text{опт}},\,y_{\text{опт}}) \text{ для любых } x,\,y.$$

Пример 6. Определить точки равновесия для игры с матрицей выигрышей

$$\begin{pmatrix} 4{,}1 & 0{,}0 \\ 0{,}0 & 1{,}4 \end{pmatrix}.$$

Решение. Нетрудно видеть, что в этой игре игроку 1 (2) невыгодно отклоняться от 1-й (2-й) стратегии, если ее придерживается игрок 2 (1).

В теории игр доказано, что для любой конечной некооперативной игры с ненулевой суммой всегда существует по крайней мере одна равновесная пара смешанных стратегий; в общем случае равновесное решение может быть не единственным, причем каждому из них могут соответствовать разные значения выигрышей у игроков.

В случае кооперативной игры с двумя игроками предполагается, что игроки не могут воздействовать друг на друга до тех пор, пока не придут к некоторому соглашению.

В этом случае игра (вернее ее исходы) представляется как множество S на плоскости общих выигрышей a_1 и a_2 (рис. 4.7). Задаются значения выигрышей T_1 и T_2, которые могут получить соответственно 1-й и 2-й игроки без кооперации с партнером. В предположении о том, что множество S является выпуклым, замкнутым и ограниченным сверху, можно доказать, что оптимальные решения находятся на правой верхней границе этого множества.

На этой границе выделяется множество P *парето-оптимальных решений*, на котором увеличение выигрыша одного из игроков возможно только за счет уменьшения выигрыша его партнера. На множество P точками T_1' и T_2' ограничено переговорное множество N; оно характерно тем, что игрокам нет смысла вести переговоры относительно решений вне его, так как положение одного из игроков может быть либо улучшено без ущерба для партнера, либо он может достичь лучшего выигрыша в одиночку. На переговорном множестве выделяется точка N^*, соответствующая равновесию по Нэшу — точка Нэша; в ней достигается максимум произведения

$$\max\,(a_1 - T_1)(a_2 - T_2),$$

в котором сомножители представляют собой превышения выигрышей каждого из игроков над платежами, которые могут быть получены игроками без кооперации.

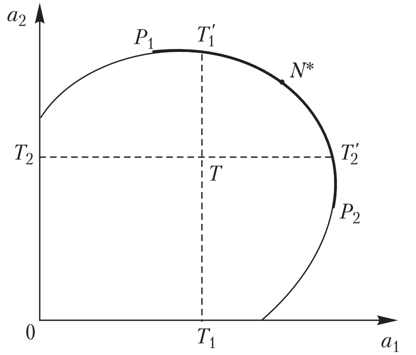


Рис. 4.7

Точка Нэша является одним из возможных решений кооперативной игры, наиболее привлекательных для партнеров.

Пример 7. Кооперативная игра дается матрицей выигрышей:

$$\begin{pmatrix} (8,2) & (0,0) \\ (4,4) & (2,8) \end{pmatrix}.$$

Определить основные характеристики игры.

Решение. На плоскости $a_1 0 a_2$ множеством S, определяющим игру, является треугольник с вершинами, данными в матрице: 0 (0, 0), A (2, 8), B (8, 2); это множество является выпуклым (рис. 4.8). Сторона AB этого треугольника представляет собой парето-оптимальное множество: увеличение выигрыша одного игрока возможно только за счет партнера. Точка T (4, 4) определяет выигрыши, которые игроки могут получить без взаимодействия с партнером. Переговорное множество N (отрезок T_1' и T_2') лежит на линии AB. На этой линии находится точка Нэша N^* (5, 5) — в ней произведение $(a_1 - 5)(a_2 - 5)$ для точек $\max(a_1, a_2)$, лежащих вне множества N, принимает наибольшее значение.

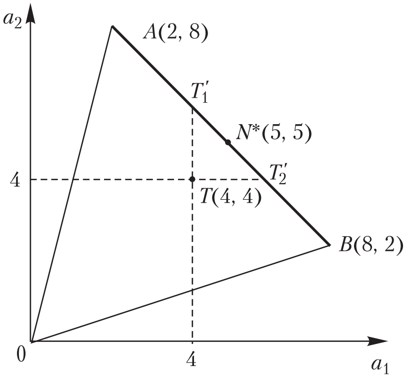


Рис. 4.8

4.6. Позиционные игры

Игры, в которых задается последовательность принятия решений игроками, называются *позиционными играми*. Число игроков в них может изменяться от двух и более. Если в ранее рассмотренных случаях полагалось, что игроки принимают свои решения одновременно, не зная о решении партнера, то в данном случае игрок принимает свое решение, уже зная о решении партнера (соперника), т. е. в ответ на его решение. К позиционным многошаговым играм двух лиц, где игроки принимают свои решения, зная о всех предыдущих решениях партнера, относятся, например, шахматы и шашки.

Позиционную игру, в силу отмеченной особенности ее структуры, наглядно представляет дерево решений (в общем случае — граф решений), приводящее игроков из исходной позиции в конечные. Вершины дерева игры называются *позициями*. Позиции, непосредственно следующие за некоторой позицией, — это *альтернативы*; позиции, не имеющие альтернатив, называются *окончательными*, а ведущие в них пути — *партиями*. Часть дерева решений, описывающая игру из некоторой позиции (которая может считаться начальной), называют *подыгрой*. Всю игру подчас можно разбить на ряд подыгр, и решения из них представляют собой самостоятельные задачи. Примером подыгры являются шахматные этюды.

Позиционные игры моделируют поведение фирм в условиях рынка, и поэтому этот класс игр широко используется в экономике.

Рассмотрим анализ рыночного поведения двух фирм на примере игры «Вступление на рынок».

Пример 8. Пусть на рынке доминирует производитель — фирма 1, и монопольное положение приносит ей прибыль 10 млн ден. ед. Фирма 2 решает вопрос о внедрении на этот рынок при следующих известных предпосылках.

В случае вступления фирмы 2 на рынок фирма 1 может отреагировать следующим образом:

а) снизить объем своего производства и тогда поделить с фирмой 2 свою прибыль по 5 млн ден. ед. на каждого конкурента;

б) не уступать в объеме производства — тогда прибыль фирмы 1 понизится до 3 млн ден. ед. вследствие снижения рыночной цены, а фирма 2 понесет убытки в размере 2 млн ден. ед. тоже из-за падения рыночной цены на товар, а также из-за того, что предварительные затраты на проработку рынка и организацию производства на не будут компенсированы. Если же фирма 2 воздерживается от вступления на рынок, то она ничего не выигрывает и не проигрывает, т. е. ее прибыль будет нулевой. В этом случае за фирмой 1 попрежнему остаются два варианта поведения: не снижать объем производства с прибылью 10 млн ден. ед. и снизить объем производства со снижением прибыли до 8 млн ден. ед.

Эта конечная неантагонистическая игра двух партнеров может быть описана матрицей выигрышей:

$$
\begin{array}{lll}
 & & \text{Стратегия фирмы 1:} \\
 & & \begin{array}{cc}\text{сохранить} & \text{снизить}\end{array} \\
\text{Стратегия фирмы 2:} & \text{вступить} & \multirow{2}{*}{$\begin{pmatrix} (3,\ -2) & (5,\ 5) \\ (10,\ 0) & (8,\ 0) \end{pmatrix}.$} \\
 & \text{не вступить} &
\end{array}
$$

Вместе с тем, эту игру можно представить также деревом решений, ветви которого соответствуют решениям партнеров, а выигрыши игроков указаны около каждой из висячих вершин (рис. 4.9).

Приведенная выше игра «Вступление на рынок» имеет две пары стратегий (две партии), приводящих к равновесию по Нэшу; при отказе фирмы 2 внедрения на рынок фирма 1 не меняет объем производства; в случае вступления фирмы 2 на рынок фирма 1 снижает объем своего производства.

В непозиционной игре, когда игроки принимают решения одновременно и независимо друг от друга, реализация обеих стратегий была бы равновероятна. В позиционной игре необходимо учитывать, что фирма 1 принимает свои решения, уже зная о решении фирмы 2. Согласно принципу максимина, фирме 2 следовало бы избрать стратегию отказа от вступления на рынок: в этом случае ее прибыль составит 0 млн ден. ед., а это больше, чем –2 млн ден. ед. в случае вступления. Однако здесь не учитывается предположение о рациональном поведении игроков, основой которого является стремление к максимизации своих выигрышей — в данном случае прибыли.

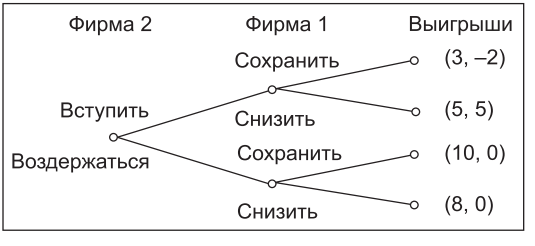


Рис. 4.9

С учетом этого обстоятельства более рациональной стратегией фирмы 1 при вступлении фирмы 2 на рынок является снижение производства, так как прибыль 5 млн ден. ед. все-таки больше, чем прибыль 3 млн ден. ед. Именно эта партия наиболее вероятна для реализации, когда фирма 2 вступит на рынок.

Приведенный пример описывает случай так называемой *неустойчивой монополии*, когда фирма-монополист не в состоянии эффективно противостоять внедрению конкурента на рынок.

Однако возможен вариант устойчивой монополии, когда фирма-монополист в силу условий организации своего производства в состоянии эффективно реализовать подавление потенциальных соперников на рынке.

РАЗДЕЛ 2

МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ И ЭКОНОМЕТРИКИ

Глава 5

Элементы математической статистики

Математическая статистика является частью общей прикладной математической дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика», однако задачи, решаемые ею, носят специфический характер. Если теория вероятностей исследует явления, полностью заданные их моделью, то в математической статистике вероятностная модель определена с точностью до неизвестных параметров. Отсутствие сведений о параметрах компенсируется «пробными» испытаниями, на основе которых и восстанавливается недостающая информация. Цель математической статистики состоит в создании методов сбора и обработки статистических данных для получения научных и практических выводов.

Первая задача математической статистики состоит в определении методов сбора и группировки статистических сведений, которые получены в результате экспериментов или наблюдений.

Вторая задача — это разработка методов анализа статистических данных: оценки неизвестных вероятностей события, а также функций и параметров распределения; оценка зависимости случайной величины от других случайных величин; проверка статистических гипотез о виде и величинах параметров неизвестного распределения. Рассмотрим некоторые из этих вопросов.

5.1. Выборочный метод

5.1.1. Выборки

На практике сплошное исследование (каждого объекта из интересующей нас совокупности) проводят крайне редко. К тому же если эта совокупность содержит большое число объектов или исследование объекта требует нарушения его функционального стандарта, то сплошное исследование нереально. В таких случаях из всей совокупности случайно отбирают ограниченное число объектов и подвергают их исследованию.

Введем основные понятия, связанные с выборками. *Генеральной совокупностью* называется совокупность объектов, из которых производится выборка. *Выборочной совокупностью* (выборкой) называется совокупность случайно отобранных из генеральной совокупности объектов. Число объектов в совокупности называется ее *объемом*.

Пример 1. Пусть из 2000 изделий отобрано для обследования 100 изделий. Тогда объем генеральной совокупности $N = 2000$, а объем выборки $n = 100$.

Выборку можно осуществлять двумя способами. Если после исследования объект из выборки возвращается в генеральную совокупность, то такая выборка называется повторной; если объект не возвращается в генеральную совокупность, то выборка называется бесповторной (или безвозвратной).

Выборка называется *репрезентативной (представительной)*, если по ее данным можно достаточно уверенно судить об интересующем нас признаке генеральной совокупности.

5.1.2. Способы отбора

Различают два способа осуществления отбора: без расчленения генеральной совокупности на части и с расчленением. К первому виду относятся простые случайные отборы (повторные либо бесповторные), когда объекты извлекают по одному из генеральной совокупности. Такой отбор можно производить с использованием таблицы случайных чисел (или генератора случайных чисел при использовании компьютеров).

Второй способ отбора включает в себя следующие разновидности, соответственно способам расчленения генеральной совокупности: типический отбор, механический отбор и серийный отбор. *Типическим* называется отбор, при котором объекты отбираются из каждой «типической» части генеральной совокупности. Например, отбор деталей из продукции каждого станка, а не из их общего количества, является типическим. Если генеральную совокупность делят на число групп, равное объему выборки, с последующим отбором из каждой группы по одному объекту, то такой отбор называется *механическим*.

Серийным называется отбор, при котором объекты отбираются не по одному, а сериями; этот способ используется, когда исследуемый признак имеет незначительные колебания в различных сериях.

На практике часто производится комбинирование указанных выше способов отбора. Например, генеральную совокупность разбивают на серии одинакового объема, затем случайным образом отбирают несколько серий, и, в завершение, случайным извлечением отдельных объектов составляют выборку. Конкретная комбинация способов отбора объектов из генеральной совокупности определяется требованием репрезентативности выборки.

5.1.3. Статистическое распределение выборки

Пусть из генеральной совокупности извлечена выборка объема n, в которой значение x_1 некоторого исследуемого признака X наблюдалось n_1 раз, значение $x_2 - n_2$ раз, ..., значение $x_3 - n_3$ раз.

Значения x_i называются *вариантами*, а их последовательность, записанная в возрастающем порядке, — *вариационным рядом*. Числа n_i называются *частотами*, а их отношения к объему выборки

$$W_i = n_i / n \tag{5.1}$$

— относительными частотами. При этом $\Sigma n_i = n$. *Модой* M_0 называется варианта, имеющая наибольшую частоту. *Медианой* m_e называется варианта, которая делит пополам вариационный ряд на две части с одинаковым числом вариант в каждой. Если число вариант нечетно, т. е. $k = 2l + 1$, то $m_e = x_{l+1}$; если же число вариант четно ($k = 2l$), то $m_e = (x_l + x_{l+1})/2$. *Размахом варьирования* называется разность между максимальной и минимальной вариантами или длина интервала, которому принадлежат все варианты выборки:

$$R = x_{\max} - x_{\min}. \tag{5.2}$$

Перечень вариант и соответствующих им частот называется статистическим распределением выборки. Здесь имеется аналогия с законом распределения случайной величины: в теории вероятностей — это соответствие между возможными значениями случайной величины и их вероятностями, а в математической статистике — это соответствие между наблюдаемыми вариантами и их частотами (относительными частотами). Нетрудно видеть, что сумма относительных частот равна единице: $\Sigma W_i = 1$.

Пример 2. Выборка задана в виде распределения частот:

x_i	4	7	8	12	17
n_i	2	4	5	6	3

Найти распределение относительных частот и основные характеристики вариационного ряда.

Решение. Найдем объем выборки: $n = 2 + 4 + 5 + 6 + 3 = 20$. Относительные частоты соответственно равны: $W_1 = 2/20 = 0{,}1$; $W_2 = 4/20 = 0{,}2$; $W_3 = 5/20 = 0{,}25$; $W_4 = 6/20 = 0{,}3$; $W_5 = 3/20 = 0{,}15$. Контроль: $0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}25 + 0{,}3 + 0{,}15 = 1$. Искомое распределение относительных частот имеет вид:

x_i	4	7	8	12	17
W_i	0,1	0,2	0,25	0,3	0,15

Мода этого вариационного ряда равна 12. Число вариант в данном случае нечетно $k = 2 \cdot 2 + 1$, поэтому медиана $m_e = x_3 = 8$. Размах варьирования, согласно формуле (5.2), $R = 17 - 4 = 13$.

5.1.4. Эмпирическая функция распределения

Пусть n_x — число наблюдений, при которых наблюдалось значение признака X, меньшее x. При объеме выборки, равном n, относительная частота события $X < x$ равна n_x/n.

Определение 1. Функция, определяющая для каждого значения x относительную частоту события $X < x$,

$$F^*(x) = n_x/n, \tag{5.3}$$

называется *эмпирической функцией распределения*, или функцией распределения выборки.

В отличие от эмпирической функции распределения $F^*(x)$ выборки функция распределения $F(x)$ генеральной совокупности называется *теоретической функцией распределения*. Различие между ними состоит в том, что функция $F(x)$ определяет вероятность события $X < x$, а $F^*(x)$ — относительную частоту этого события. Из теоретических результатов общей теории вероятностей (закон больших чисел) следует, что при больших n вероятность отличия этих функций друг от друга близка к единице:

$$\lim_{n\to\infty} P[|F(x) - F^*(x)| < \varepsilon = 1, \quad \varepsilon > 0. \tag{5.4}$$

Нетрудно видеть, что $F^*(x)$ обладает всеми свойствами $F(x)$, что вытекает из ее определения (5.3):

1) значения $F^*(x)$ принадлежат отрезку [0,1];
2) $F^*(x)$ является неубывающей функцией;
3) пусть x_m и x_M — соответственно минимальная и максимальная варианты, тогда $F^*(x) = 0$ при $x \le x_m$ и $F^*(x) = 1$ при $x \ge x_M$.

Сама же функция $F^*(x)$ служит для оценки теоретической функции распределения $F(x)$ генеральной совокупности.

Пример 3. Построить эмпирическую функцию по заданному распределению выборки:

x_i	2	4	6
n_i	10	15	25

Решение. Находим объем выборки: $n = 10 + 15 + 25 = 50$. Наименьшая варианта равна 2, поэтому $F^*(x) = 0$ при $x \le 2$. Значение $X < 4$ (или $x_1 = 2$) наблюдалось 10 раз, значит $F^*(x) = 10/50 = 0{,}2$ при $2 < x < 4$. Значения $X < 6$ (а именно $x_1 = 2$ и $x_2 = 4$) наблюдались $10 + 15 = 25$ раз, значит при $4 < x < 6$ функция $F^*(x) = 25/50 = 0{,}5$. Поскольку $x = 6$ — максимальная варианта, то $F^*(x) = 1$ при $x > 6$. Напишем формулу искомой эмпирической функции:

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & x \le 2, \\ 0,2, & 2 < x \le 4, \\ 0,5, & 4 < x \le 6, \\ 1, & x > 6. \end{cases}$$

График этой функции показан на рис. 5.1.

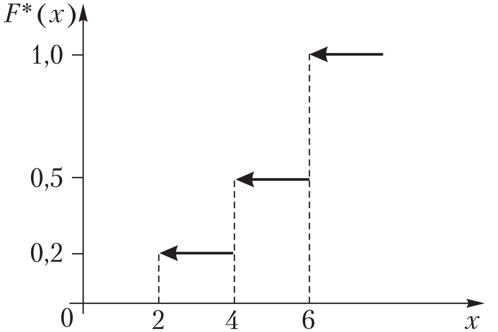


Рис. 5.1

5.1.5. Полигон и гистограмма

Каждую пару значений (x_i, n_i) из распределения выборки можно трактовать как точку на координатной плоскости. Точно также можно рассматривать и пары значений (x_i, W_i) относительного распределения выборки. Ломаная, отрезки которой соединяют точки (x_i, n_i) , называется *полигоном частот*. Ломаная, соединяющая на координатной плоскости точки (x_i, W_i), называется *полигоном относительных частот*. На рис. 5.2 показан полигон относительных частот для распределения, приведенного в примере 2.

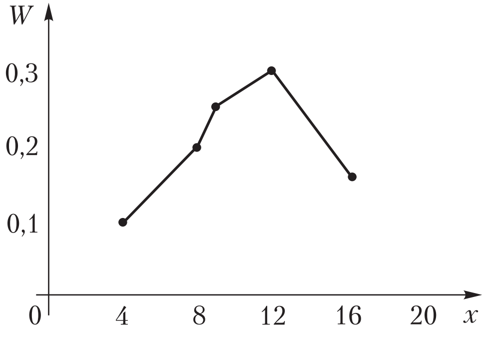


Рис. 5.2

Для случая непрерывного признака X удобно разбить интервал $(x_{\min}, x_{\max})$ его наблюдаемых значений на несколько частичных интервалов длиной h каждый и найти для каждого из этих интервалов сумму частот n_j, попавших в него. Ступенчатая фигура, состоящая из прямоугольников с основаниями длиной h и высотами n_j/h (плотность частоты), называется *гистограммой частот*. Геометрический смысл гистограммы: нетрудно видеть, что площадь ее равна сумме всех частот или объему выборки. На рис. 5.3 изображена гистограмма выборки объема $n = 100$.

Аналогичным образом определяется и *гистограмма относительных частот*. Высоты прямоугольников, составляющих ступенчатую фигуру, определяются отношениями сумм относительных частот, попадающих в интервал $(x_{\min} + (j - 1)h, x_{\min} + jh)$ к длине интервала h, т. е. величинами W_j/h. В этом случае площадь гистограммы относительных частот равна единице (сумме относительных частот выборки).

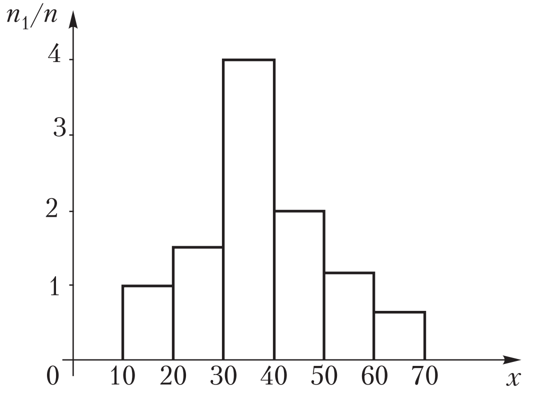


Рис. 5.3

5.2. Статистические оценки параметров распределения

Рассмотрим значения количественного признака $x_1, x_2, ..., x_n$ в выборке как независимые случайные величины $X_1, X_2, ..., X_n$.

Тогда нахождение статистической оценки неизвестного параметра теоретического распределения означает отыскание функции от наблюдаемых случайных величин, которая и даст нам приближенное значение искомого параметра.

5.2.1. Виды статистических оценок параметров распределения

Несмещенной называется статистическая оценка θ_*, математическое ожидание которой равно оцениваемому параметру θ при любой выборке:

$$M(\theta_*) = \theta. \tag{5.5}$$

Смещенной называется оценка, при которой условие (5.5) не выполнено. *Эффективной* называется оценка, которая имеет минимальную дисперсию при заданном объеме выборки n. *Состоятельной* называется статистическая оценка типа (5.4), которая при $n \to \infty$ стремится по вероятности к оцениваемому параметру.

Теперь укажем виды числовых характеристик оценок. Прежде всего — это средние. *Генеральная средняя* для изучаемого количественного признака X по генеральной совокупности

$$\bar{x}_{\text{г}} = (x_1 + x_2 + \ldots + x_N)/N$$

и *выборочная средняя*

$$\overline{x}_{\text{в}} = (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)/n.$$

Если значения признака $x_1 + x_2 + ... + x_k$ в выборке имеют соответственно частоты $n_1, n_2, ..., n_k$, то последнюю формулу можно переписать в виде:

$$\overline{x}_{\text{в}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i. \tag{5.6}$$

Можно показать, что выборочная средняя (5.6) является несмещенной оценкой; это аналог математического ожидания случайной величины $X_{\text{В}}$.

Введем в рассмотрение величины, характеризующие отклонение значений количественного признака X от своего среднего значения. Это *генеральная дисперсия*

$$D_{\text{г}} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} (x_i - \overline{x}_{\text{г}})^2 \tag{5.7}$$

и выборочная дисперсия

$$D_{\text{в}} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x}_{\text{в}})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \overline{x}_{\text{в}})^2. \tag{5.8}$$

Для вычисления этих характеристик используются более удобные формулы, аналогичные дисперсии случайной величины; так, формула (5.8) для выборочной дисперсии принимает вид:

$$D_{\text{в}} = \sigma_{\text{в}}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^2 - (\overline{x}_{\text{в}})^2. \tag{5.9}$$

Соответственно определяются *генеральное* и *выборочное средние квадратические отклонения*

$$\sigma_{\text{г}} = \sqrt{D_{\text{г}}}, \quad \sigma_{\text{в}} = \sqrt{D_{\text{в}}}. \tag{5.10}$$

Выборочная дисперсия (5.8) является состоятельной, но смещенной оценкой. Статистическая оценка, которая называется *исправленной дисперсией* и определяется как

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x}_{\text{в}})^2, \tag{5.11}$$

является состоятельной несмещенной оценкой генеральной дисперсии.

Пример 4. Выборка задана таблицей распределения

x_i	1	2	3	5
n_i	15	20	10	5

Найти выборочные характеристики: среднюю, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

Решение. По формуле (5.6) сначала находим $\bar{x}_в$:

$$\bar{x}_в = \frac{15 \cdot 1 + 20 \cdot 2 + 10 \cdot 3 + 5 \cdot 5}{15 + 20 + 10 + 5} = \frac{110}{50} = 2,2.$$

Затем по формулам (5.8)–(5.10) находим две другие искомые величины:

$$D_в = (15 \cdot 1 + 20 \cdot 4 + 109 + 5 \cdot 25)/50 - 2,2^2 = 6,2 - 4,84 = 1,36.$$

$$\sigma_в = \sqrt{D_в} = \sqrt{1,36} \approx 1,166.$$

5.2.2. Виды дисперсий

Часто значения количественного признака X совокупности разбиваются на определенное число групп. Каждую группу можно рассматривать как самостоятельную выборку, и для каждой группы можно определить групповую среднюю и дисперсию. Пусть r — число групп. *Групповой дисперсией* называется дисперсия значений признака в группе относительно групповой средней:

$$D_j = \frac{1}{N_j} \sum_{i=1}^{N_j} n_i (x_i - \bar{x}_j)^2, \quad j = 1, 2, \ldots, r. \tag{5.12}$$

где n_i — частота значения x_i в группе;

j — номер группы;

$\bar{x}_j$ — групповая средняя j-й группы;

$N_j = \Sigma n_i$ — объем j-й группы.

Знная дисперсию каждой группы, можно определить их среднюю арифметическую. *Внутригрупповой дисперсией* называется средняя арифметическая дисперсий, где каждое слагаемое входит с весом, соответствующим объему группы:

$$D_{внгр} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{r} N_j D_j. \tag{5.13}$$

В свою очередь, зная для всех групп средние $\bar{x}_j$ и общую среднюю $\bar{x}$, введем еще одно понятие. Межгрупповой дисперсией называется дисперсия групповых средних относительно общей средней:

$$D_{\text{мгр}} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{r} N_j(\bar{x}_j - \bar{x})^2. \tag{5.14}$$

где $n = \sum_{j=1}^{r} N_j$ — объем всей совокупности.

Для общей дисперсии всей совокупности справедлива следующая теорема, которая приводится здесь без доказательства.

Теорема 5.1. *Если совокупность состоит из нескольких групп, то общая дисперсия равна сумме внутригрупповой и межгрупповой дисперсий:*

$$D_{\text{общ}} = D_{\text{внгр}} + D_{\text{мгр}}, \tag{5.15}$$

где слагаемые в правой части определяются соответственно формулами (5.13) и (5.14). Поясним сказанное в этом пункте на примере.

Пример 5. Совокупность состоит из двух групп:

Первая группа				Вторая группа		
x_i	2	4	5	x_i	4	9
n_i	1	7	2	n_i	3	2

Найти групповые, внутригрупповую, межгрупповую и общую дисперсии.

Решение. Объемы групп соответственно равны $N_1 = 10$ и $N_2 = 5$. Общий объем совокупности: $n = 10 + 5 = 15$. Найдем групповые средние:

$$\bar{x}_1 = (1 \cdot 2 + 7 \cdot 4 + 2 \cdot 5)/10 = 4; \quad \bar{x}_2 = (2 \cdot 3 + 3 \cdot 8)/5 = 6.$$

Теперь находим групповые дисперсии по формуле (5.12):

$$D_1 = (1\ (2-4)^2 + 7\ (4-4)^2 + 2\ (5-4)^2)/10 = 0{,}6;$$

$$D_2 = (3\ (4-6)^2 + 2\ (9-6)^2)/5 = 6.$$

Внутригрупповая дисперсия, согласно формуле (5.13), равна:

$$D_{\text{внгр}} = (10 \cdot 0{,}6 + 5 \cdot 6)/15 = 2{,}4.$$

Теперь найдем межгрупповую дисперсию по формуле (5.14), для чего сначала определим общую среднюю:

$$\overline{x} = (1 \cdot 2 + 7 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 4 + 2 \cdot 9)/15 = 70/15 = 14/3.$$

$$D_{\text{мгр}} = (10 \cdot (4 - 14/3)^3 + 5 \cdot (6 - 14/3)^2)/15 = 8/9.$$

Наконец, общая дисперсия, согласно формуле (5.15), равна:

$$D_{\text{общ}} = 2{,}4 + 8/9 \approx 3{,}29.$$

5.2.3. Эмпирические моменты

Для вычисления сводных характеристик выборок используют эмпирические моменты, аналогичные соответствующим теоретическим моментам. *Обычным эмпирическим моментом порядка s* называется среднее значение s степеней разностей $x_i - C$, где x_i — наблюдаемая варианта, C — произвольная константа (ложный нуль — либо мода, либо любая варианта, расположенная примерно в середине вариационного ряда):

$$M'_s = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - C)^s. \qquad (5.16)$$

При $C = 0$ имеем *начальные эмпирические моменты порядка s*; в частности, в случае $s = 1$:

$$M_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i = \overline{x}_{\text{в}}.$$

Центральным эмпирическим моментом порядка s называется обычный момент (5.16) при $C = \overline{x}_{\text{в}}$:

$$m_s = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \overline{x}_{\text{в}})^s. \qquad (5.17)$$

В частности, центральный момент второго порядка:

$$m_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \overline{x}_{\text{в}})^2 = D_{\text{в}}, \qquad (5.18)$$

иными словами, это совпадает с выборочной дисперсией.

5.2.4. Асимметрия и эксцесс эмпирического распределения

В применениях математической статистики одним из самых распространенных является нормальное распределение. Для оценки отклонения эмпирического распределения от нормального используют следующие характеристики: асимметрия и эксцесс.

Асимметрия эмпирического распределения определяется следующим равенством:

$$a_s = m_3/\sigma_в^3. \tag{5.19}$$

Эксцесс эмпирического распределения определяется следующим равенством:

$$e_k = m_4/\sigma_в^4 - 3. \tag{5.20}$$

В формулы (5.19) и (5.20) входят центральные эмпирические моменты, определяемые формулой (5.17), а также выборочное среднее квадратическое отклонение (5.10). Асимметрия и эксцесс служат для сравнения полигона эмпирического распределения с нормальным распределением: знак a_s указывает на расположение длинной части ломаной относительно математического ожидания (справа при $a_s > 0$ и слева при $a_s < 0$). Эксцесс e_k характеризует «крутость» ломаной: при $e_k > 0$ сравниваемая кривая более высокая и острая, при $e_k < 0$ она более низкая и плоская (рис. 5.4).

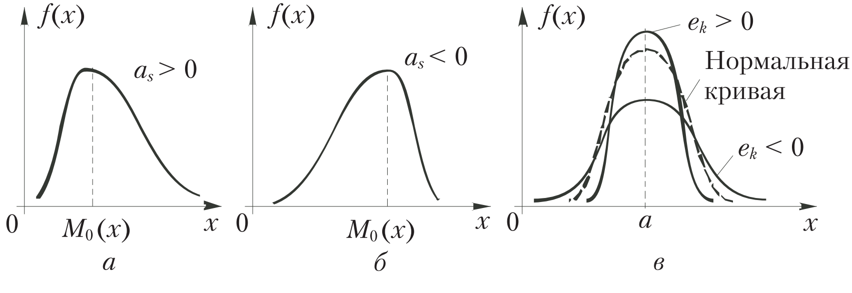


Рис. 5.4

Пример 6. Найти асимметрию и эксцесс эмпирического распределения:

варианта	1	2	3	4	5	6	10
частота	5	10	15	35	16	15	4

Решение. Найдем сначала $\bar{x}_в$ и $\sigma_в$ по формулам (5.6)–(5.10):

$$\bar{x}_в = \frac{5\cdot 1 + 10\cdot 2 + 15\cdot 3 + 35\cdot 4 + 16\cdot 5 + 15\cdot 6 + 4\cdot 10}{5 + 10 + 15 + 35 + 16 + 15 + 4} = 4{,}2;$$

$$D_в = \frac{5\cdot 1 + 10\cdot 4 + 15\cdot 9 + 36\cdot 15 + 16\cdot 25 + 15\cdot 36 + 41\cdot 000}{100} - 4{,}2^2 = 3{,}56.$$

$$\sigma_в = 1{,}887.$$

Далее, используя формулы (5.17), определяем центральные эмпирические моменты третьего и четвертого порядков:

$$m_3 = (5\ (-3{,}2)^3 + 10\ (-2{,}2)^3 + 15\ (-1{,}2)^3 + 35\ (-0{,}2)^3 + 16\ 0{,}8^3 + \\ + 15\ 1{,}8^3 + 4\ 5{,}8^3)/100 = 579{,}6/100 = 5{,}796;$$

$$m_4 = (5\ (-3{,}2)^4 + 10\ (-2{,}2)^4 + 15\ (-1{,}2)^4 + 35\ (-0{,}2)^4 + 16\ 0{,}8^4 + \\ + 15\ 1{,}8^4 + 4\ 5{,}8^4\ )/100 = 5480{,}32/100 = 54{,}8032.$$

Затем по формулам (5.19) и (5.20) находим искомые величины:

$$a_s = 5{,}796/1{,}887^3 = 0{,}863;\ e_k = 54{,}8032/1{,}887^4 = 4{,}322.$$

5.3. Точечные оценки параметров распределения

В теории и практике методов математической статистики часто встает вопрос о близости выборки к тому или иному теоретическому распределению. В этом случае появляется необходимость вычисления оценок соответствующих параметров распределения. Поскольку эти оценки определяются одним числом, они называются *точечными*. В этом разделе мы приведем два наиболее часто применяемых метода точечной оценки.

5.3.1. Метод моментов

Можно полагать, что начальные и центральные эмпирические моменты являются состоятельными оценками соответствующих теоретических моментов. На этом предположении основан метод моментов, предложенный К. Пирсоном и широко используемый из-за его сравнительной простоты. Метод основан на приравнивании теоретических моментов рассматриваемого распределения соответствующим эмпирическим моментам того же порядка. При этом различаются случаи распределений с одним параметром и с двумя параметрами.

1. *Оценка одного параметра.* Пусть задана плотность распределения $f(x, \theta)$ с одним параметром. Согласно методу моментов приравниваем, например, соответствующие начальные моменты первого порядка, т. е. среднюю выборки $\bar{x}_в$ и математическое ожидание распределения $M(X)$. Здесь достаточно одного уравнения относительно этого параметра:

$$M(X) = \bar{x}_в. \tag{5.21}$$

Поскольку математическое ожидание является функцией параметра θ (это следует из соответствующей формулы, известной из теории случайных величин)

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x, \theta)dx = \varphi(\theta), \tag{5.22}$$

то соотношение (5.21) можно рассматривать как уравнение с одним неизвестным, которое определяет точечную оценку параметра θ, которая является функцией вариант выборки:

$$\theta^* = \psi\,(x_1, x_2, ..., x_n) \tag{5.23}$$

Пример 7. Найти методом моментов по выборке $x_1, x_2, ..., x_n$ точечную оценку неизвестного параметра λ показательного распределения с известной функцией плотности распределения $f(x) = \lambda^{-\lambda x}$ $(X \geq 0)$.

Решение. Формула (5.22) при помощи интегрирования по частям дает: $M(X) = 1/\lambda$. Далее из формулы (5.21) получаем, что $\lambda^* = 1/\bar{x}_{\text{в}}$.

т. е. искомая точечная оценка параметра λ показательного распределения равна обратной выборочной средней: $\lambda^* = 1/\bar{x}_{\text{в}}$.

2. *Оценка двух параметров*. Пусть задана функция плотности распределения $f\,(x, \theta_1, \theta_2)$. Для отыскания двух неизвестных параметров нужно иметь два уравнения, для чего приравняем друг другу соответственно начальные теоретические и эмпирические моменты первого и второго порядка:

$$M(X) = \bar{x}_{\text{в}}, \;\; D\,(X) = D_{\text{в}}. \tag{5.24}$$

Поскольку $M\,(X)$ и $D\,(X)$ есть функции от θ_1 и θ_2, то соотношения (5.24) определяют точечные оценки этих параметров как функции от варианта выборки:

$$\theta_1^* = \psi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \;\; \theta_2^* = \psi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n). \tag{5.25}$$

Пример 8. Найти методом моментов по выборке $x_1, x_2, ..., x_n$ точечные оценки неизвестных параметров a и σ нормального распределения с функцией плотности распределения вероятности

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right). \tag{5.26}$$

Решение. Как известно из теории случайных величин, $M\,(X) = a$, $D\,(X) = \sigma^2$. Используя формулы (5.24), получаем искомые точечные оценки параметров нормального распределения: $a^* = \bar{x}_{\text{в}}$, $\sigma^* = \overline{D}_{\text{в}}$.

5.3.2. Метод наибольшего правдоподобия

Этот метод был предложен Р. Фишером. Рассмотрим его для дискретных и непрерывных случайных величин.

1. Дискретные *случайные величины.* Пусть X — дискретная случайная величина, которая получила значения $x_1, x_2, ..., x_n$ в результате n испытаний. Пусть известен закон распределения величины X, но неизвестен определяющий его параметр θ. Требуется найти его точечную оценку.

Обозначим вероятность того, что в результате испытания величина X примет значение x_i через $p\,(x_i, \theta)$.

Определение 2. Функция аргумента

$$L\,(x_1, x_2, ..., x_n, \theta) = p\,(x_1, \theta,)\, p\,(x_2, \theta) ... p\,(x_n, \theta), \tag{5.27}$$

где $x_1, x_2, ..., x_n$ — фиксированные числа, называется *функцией правдоподобия дискретной случайной величины* X. Функцию

$$\ln L\,(x_1, x_2, ..., x_n, \theta) = \ln\,[p\,(x_1, \theta)\, p\,(x_2, \theta) ... p\,(x_n, \theta)] \tag{5.28}$$

называют *логарифмической функцией правдоподобия.*

В качестве точечной оценки параметра θ принимается его значение θ^*, при котором функция (5.27) достигает максимума. При этом оценку θ^* называют *оценкой наибольшего правдоподобия.* Точка максимумов у обеих функций одна и та же, но вместо функции L удобнее анализировать функцию $\ln L$.

Пример 9. Найти методом наибольшего правдоподобия оценку неизвестного параметра p биномиального распределения

$$P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k},$$

если в n испытаниях событие A появилось k_1 раз и в m испытаниях событие A появилось k_2 раз.

Решение. Сначала составим функцию правдоподобия (в нашем случае $p = \theta$):

$$L = P_n(k_1) P_m(k_2) = C_n^{k_1} C_m^{k_2} p^{k_1+k_2} (1-p)^{n+m-k_1-k_2}.$$

Логарифмическая функция правдоподобия имеет вид

$$\ln L = \ln(C_n^{k_1} C_m^{k_2}) + (k_1 + k_2)\ln p + (n + m - k_1 - k_2)\ln(1-p).$$

Затем находим производную по p и приравниваем ее нулю; получаем:

$$(k_1 + k_2)/p + (n + m - k_1 - k_2)/(1 - p) = 0.$$

Решение этого уравнения относительно p дает: $p = (k_1 + k_2)/(n + m)$.

Нетрудно убедиться, что вторая производная функции $\ln L < 0$, т. е. полученное значение p является точкой максимума логарифмической функции правдоподобия и, значит, эту величину нужно принять в качестве оценки наибольшего правдоподобия неизвестного параметра p^* биномиального распределения:

$$p^* = (k_1 + k_2)/(n + m).$$

2. *Непрерывные случайные величины*. Пусть X — непрерывная случайная величина, которая приняла значения $x_1, x_2, ..., x_n$ в результате n испытаний. Основное допущение состоит в том, что известна функция распределения плотности $f(x)$, но неизвестен ее определяющий параметр θ.

Определение 3. Функция аргумента θ

$$L(x_1, x_2, ..., x_n, \theta) = f(x_1, \theta) f(x_2, \theta) \ldots f(x_n, \theta), \qquad (5.29)$$

где $x_1, x_2, ..., x_n$ — фиксированные числа, называется *функцией правдоподобия непрерывной случайной величины X*.

Метод оценки наибольшего правдоподобия неизвестного параметра θ такой же, как и в предыдущем случае: поиск точки максимума функции L. Если в известной функции распределения $f(x)$ неизвестны два параметра, то функция правдоподобия имеет вид

$$L(x_1, x_2, ..., x_n, \theta_1, \theta_2) = f(x_1, \theta_1, \theta_2) f(x_2, \theta_1, \theta_2) \ldots f(x_n, \theta_1, \theta_2), \qquad (5.30)$$

и тогда ищется точка максимума функции двух переменных.

Соответствующие логарифмические функции наибольшего правдоподобия вводятся так же, как и в случае дискретной случайной величины.

Пример 10. Найти методом наибольшего правдоподобия оценку параметра λ показательного распределения из примера 7.

Решение. Составим функцию правдоподобия (5.29) — в нашем случае $\theta = \lambda$:

$$L = (\lambda e^{-\lambda x_1})(\lambda e^{-\lambda x_1}) \ldots (\lambda e^{-\lambda x_1}) = \lambda^n e^{-\lambda(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)}.$$

Отсюда найдем логарифмическую функцию правдоподобия

$$\ln L = n \ln \lambda - \lambda (x_1 + x_2 + \ldots + x_n).$$

Производную этой функции приравниваем нулю, откуда получаем:

$$\lambda = 1/(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = 1/\bar{x}_{\text{в}},$$

что совпадает с результатом примера 7.

5.4. Интервальные оценки параметров распределения

5.4.1. Доверительный интервал

При малых объемах выборки точечная оценка может приводить к большим ошибкам и значительно отличаться от оцениваемого параметра. Более широкое применение получил метод доверительных интервалов, разработанный американским статистиком Ю. Нейманом. В дальнейшем этот метод нам понадобится.

Определение 4. *Доверительным интервалом для параметра* θ с надежностью оценки p называется числовой промежуток $(\theta^* - \delta, \theta^* + \delta)$, содержащий истинное значение данного параметра с вероятностью, равной p:

$$P(\theta^* - \delta < \theta < \theta^* + \delta) = p, \tag{5.31}$$

где θ^* — оценка неизвестного параметра θ (например, точечная оценка); $\delta > 0$ — некоторое число.

Обычно надежность оценки p задается числом, близким к единице. Иными словами, доверительный интервал покрывает неизвестный параметр с заданной надежностью. Число $\alpha = 1 - p$ называется *уровнем значимости*. Общая схема построения доверительных интервалов сводится к следующему.

1. Рассматриваются теоретические выборки случайных величин, с распределениями которых связан параметр θ.

2. Подбирается случайная величина Y с известным распределением, значения которой определяются выборками и параметром θ: $Y = Y(\theta)$.

3. По известному распределению Y подбираются числа Y_1 и Y_2 такие, чтобы выполнялось равенство $P(Y_1 < Y(\theta) < Y_2) = p$.

4. По значениям Y_1 и Y_2 определяется число $\delta > 0$ при известном значении θ^*. Таким образом, условие (5.31) будет выполнено и доверительный интервал построен.

Пример 11. Найти доверительные интервалы надежности $p_1 = 0{,}95$ и $p_2 = 0{,}99$ для нормальной случайной величины X с функцией распределения $N(0, 1)$ — когда в формуле (5.26) $a = 0$ и $\sigma = 1$.

Решение. В первом случае $p/2 = 0{,}475$; из равенства $\Phi(x) = 0{,}475$ по табл. П.1 определяем $x = 1{,}96$, т. е. при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ $X \in (-1{,}96;\ 1{,}96)$. Во втором случае из аналогичного равенства $\Phi(x) = 0{,}495$ получаем $x = 2{,}58$, т. е. при уровне значимости $\alpha = 0{,}01$ $X \in (-2{,}58;\ 2{,}58)$.

5.4.2. Интервальные оценки математического ожидания нормального распределения

Приведем интервальные оценки математического ожидания a нормально распределенной случайной величины. Здесь нужно различать два основных случая.

1. *Интервальная оценка при известном* σ.

Потребуем, чтобы выполнялось условие

$$P(|\overline{X} - a| < \delta) = \gamma, \tag{5.32}$$

где $\overline{X}$ — выборочная средняя;

δ — точность;

γ — заданная надежность.

Поскольку функция интеграла вероятностей $\Phi(x)$ нечетная, то

$$P(|\overline{X} - a| < \delta) = \Phi(\delta/\sigma) - \Phi(-\delta/\sigma) = 2\Phi(\delta/\sigma) = \gamma.$$

Мы рассматриваем выборочные значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$ как одинаково распределенные независимые случайные величины, и выборочную среднюю — также как случайную величину, меняющуюся от выборки к выборке. В таком случае, заменяя σ на $\sigma/\sqrt{n}$, где n — объем выборки, получаем

$$P(|\overline{X} - a| < t\sigma/\sqrt{n}) = 2\Phi(t).$$

Таким образом, интервальной оценкой с надежностью γ неизвестного математического ожидания a по выборочному среднему $\overline{x}$ при известном среднем квадратическом отклонении σ является доверительный интервал

$$\overline{x} - t\sigma/\sqrt{n} < a < \overline{x} + t\sigma/\sqrt{n}, \tag{5.33}$$

где n — объем выборки; $\overline{x} - t\sigma/\sqrt{n}$ — точность оценки; t — значение аргумента функции $\Phi(t)$, которое определяется из условия

$$\Phi(t) = \gamma/2 \tag{5.34}$$

по таблице Приложения 2. В формуле (5.33) случайная величина $\overline{X}$ заменена на неслучайную величину $\overline{x}$, найденную по выборке.

Пример 12. Случайная величина X имеет нормальное распределение с известным среднеквадратическим отклонением $\sigma = 3$. Объем выборки $n = 36$. Найти доверительные интервалы для оценки неизвестного математического ожидания a по выборочным средним $\overline{x} = 4$ и 7,5 при заданной надежности $\gamma = 0{,}95$.

Решение. Из условия $2\Phi(t) = 0{,}95$ по таблице Приложения 2 находим $t = 1{,}96$. Далее определяем точность оценки: $\delta = 1{,}96 \cdot 3/6 = 0{,}98$. Согласно формуле (5.33), доверительный интервал имеет вид:

$$(\overline{x} - 0{,}98,\ \ \overline{x} + 0{,}98).$$

Отсюда получаем доверительные интервалы для оценки неизвестного математического ожидания a по выборочным средним $\overline{x} = 4$ и 7,5 соответственно (3,02, 4,98), (6,52, 8,48) с надежностью 0,95. В данном примере надежность 0,95 означает, что при достаточно большом числе выборок 95% из них определяет указанные доверительные интервалы, в которых параметр a заключен, и только в 5% случаях он может выйти за границы доверительного интервала.

2. *Интервальная оценка при неизвестном* σ.

Для этого случая можно построить случайную величину Е, имеющую распределение Стьюдента с $k = n - 1$ степенями свободы

$$T = (\overline{X} - a)\sqrt{n}/S, \tag{5.35}$$

где S — «исправленное» среднее квадратическое отклонение, а $\overline{X}$ и n имеют тот же смысл, что и в предыдущем пункте.

Принимается, что неизвестная случайная величина S описывается распределением Стьюдента, которое в данном случае определяется объемом выборки n и не зависит от неизвестных параметров a и σ. Далее при известном виде плотности этого распределения $S(t, n)$, (см. формулу (5.38)) проводится та же процедура, что и в предыдущем пункте, с той лишь разницей, что вместо функции $\Phi(t)$ используется интеграл от функции $S(t, n)$, который табулирован, как и функция $\Phi(t)$. В итоге получается формула для оценки доверительного интервала покрытия a с заданной надежностью γ

$$P(|(\overline{X} - a)\sqrt{n}/S| < t_\gamma) = \gamma,$$

где t_γ определяется из условия, аналогичного соотношению (5.34). Таким образом, доверительный интервал, покрывающий неизвестный параметр a с надежностью γ, имеет вид

$$(\bar{x} - t_\gamma\, s/\sqrt{n},\ \ \bar{x} + t_\gamma\, s/\sqrt{n}), \tag{5.36}$$

где $\delta = t_\gamma s/\sqrt{n}$ — точность оценки. Здесь случайные величины $\overline{X}$ и S заменены неслучайными величинами $\bar{x}$ и s, найденными по выборке.

Пример 13. Количественный признак X генеральной совокупности распределен нормально. По выборке объема $n = 36$ найдены выборочная средняя $\bar{x} = 20$ и $s = 0{,}8$. Найти доверительный интервал для неизвестного математического ожидания a с надежностью 0,95.

Решение. Пользуясь таблицей Приложения 2, находим при $\gamma = 0{,}95$ и $k = n - 1 = 35$: $t_\gamma = 2{,}13$. Следовательно, точность $\gamma = 0{,}28$. Наконец, по формуле (5.36) получаем доверительный интервал, покрывающий неизвестный параметр a с надежностью 0,95: (19,72, 20,28).

В заключение этого раздела отметим, что малый объем выборки заметно влияет на увеличение доверительного интервала — это непосредственно видно из формул (5.32) и (5.35). Иными словами, малые выборки существенно загрубляют и «размазывают» оценки неизвестных параметров.

5.5. Статистические оценки статистических гипотез

Обычно в практических задачах не встречаются случайные величины, распределения которых точно соответствовали бы теоретическим распределениям. Последние являются математическими моделями реальных распределений. Подбор таких моделей и анализ их адекватности моделируемым случайным величинам является одной из основных задач математической статистики, которая, в свою очередь, сводится к проверке предположений (гипотез) о виде модели распределения и о его параметрах.

Определение 5. *Статистической* называется гипотеза о виде неизвестного распределения, о параметрах известных распределений, об отношениях между случайными величинами и т. д.

5.5.1. Виды статистических гипотез

Определение 6. *Нулевой* (*основной*) гипотезой называется выдвинутая гипотеза H_0.

Определение 7. *Конкурирующей* (*альтернативной*) гипотезой называется гипотеза P, которая противоречит нулевой гипотезе H_0.

Например, если нулевая гипотеза состоит в предположении о том, что математическое ожидание нормального распределения $a = 5$, то конкурирующая гипотеза может состоять в предположении, что $a \neq 5$. В краткой записи: H_0: $a = 5$; H_1: $a \neq 5$.

Гипотезы подразделяют на *простые* (содержащие только одно предположение) и *сложные* (состоящие из конечного или бесконечного числа простых гипотез). Наиболее распространенными являются два типа гипотез.

1. *Параметрические гипотезы*: при известном виде распределения предположения о неизвестных характеристиках этих распределений.

2. Для известной случайной величины (выборки) предположения о виде ее распределения.

5.5.2. Общая схема проверки статистических гипотез

Определение 8. *Статистическим критерием* (или просто критерием) называют случайную величину T, которая служит для проверки статистических гипотез.

Укажем основные моменты проверки статистических гипотез.

1. Для основной гипотезы H_0 формулируется альтернативная гипотеза H_1.

2. Выбирается малое положительное число α — уровень значимости проверки. Обычно α колеблется в пределах от 0,01 до 0,05.

3. Рассматриваются теоретические выборки значений случайных величин, о которых сформулирована гипотеза H_0, и выбирается (формируется) случайная величина T. Значения и распределение T полностью определяются по выборкам при предположении о верности гипотезы H_0. Величина T называется *статистикой*, или *тестом* критерия.

4. На числовой оси задают интервал D такой, что вероятность попадания теста T в этот интервал равна $p = 1 - \alpha$:

$$P(T \in D) = 1 - \alpha. \tag{5.37}$$

Интервал D называется *областью принятия гипотезы* H_0, а оставшаяся область числовой оси — *критической областью*. В ряде случаев за область D принимают один из интервалов: $(-\infty, t_{cr}]$, $[-t_{cr}, t_{cr}]$, $[t_{cr}, \infty)$, где число t_{cr} — *критическое значение теста проверки*. Соответственно этим промежуткам критерий проверки называется *правосторонним*, *двусторонним* или *левосторонним*. Соответствующие области отклонения гипотезы H_0: (t_{cr}, ∞), $(-\infty, -t_{cr}) \cup (t_{cr}, \infty)$ и $(-\infty, t_{cr})$.

5. По реализациям анализируемых теоретических выборок вычисляется конкретное (наблюдаемое) значение теста T (обозначим его t_c) и проверяется выполнение условия (5.37): если оно выполняется, то гипотеза H_0 принимается в том смысле, что она не противоречит опытным данным; если же условие (5.37) не выполняется, то полагается, что гипотеза H_0 неверна и вероятность этого события определена неверно.

Из представленной выше схемы следует, что при проверке гипотезы H_0 возможны следующие ошибки:

- *ошибка первого рода* — отвергнуть гипотезу H_0 при ее правильности, вероятность этой ошибки равна α;
- *ошибка второго рода* — принятие гипотезы H_0 при правильности альтернативной гипотезы H_1.

Пусть вероятность ошибки второго рода равна β, тогда число $1 - \beta$ называют *мощностью* критерия. Чем больше мощность критерия, тем меньше вероятность ошибки второго рода. При выбранном уровне значимости критическую область следует строить так, чтобы мощность критерия была максимальной.

Можно показать, что в случае ограниченного интервала области принятия гипотезы H_0 (двусторонней критической области) существует связь интервала D, определяемого по (5.37) с доверительным интервалом, определяемым по формуле (5.31).

5.5.3. Типы статистических критериев проверки гипотез

Любой критерий не доказывает справедливость проверяемой гипотезы H_0, а лишь устанавливает на принятом уровне значимости ее согласие или несогласие с данными наблюдений. Укажем здесь наиболее употребительные критерии проверки статистических гипотез.

1. Критерий χ^2, или критерий Пирсона.
2. Критерий Стьюдента.
3. Критерий Фишера.
4. Критерий Колмогорова[1].

---

[1] Колмогоров А. Н. — советский математик (1903–1987).

Обычно один из указанных критериев и употребляют при составлении теста критерия проверки (см. п. 4 схемы проверки в предыдущем разделе). Основой для составления соответствующих формул критериев Пирсона, Стьюдента и Фишера являются соответствующие распределения, известные из теории случайных величин.

Рассмотрим примеры проверки статистических гипотез с использованием критериев Пирсона, Стьюдента и Фишера.

Пример 14. Заданы эмпирические и теоретические частоты (n_i и n_i') при числе групп выборки $s = 8$:

n_i	6	13	38	74	106	85	30	14
n_i'	3	14	42	82	99	76	37	13

При уровне значимости 0,05 проверить гипотезу H_0 с левосторонним критерием о нормальном распределении генеральной совокупности.

Решение. Наблюдаемое значение критерия вычисляется по формуле

$$\chi^2_{\text{набл}} = \sum_{i=1}^{s} (n_i - n_i')^2 / n_i, \tag{5.38}$$

или, что то же самое, по упрощенной формуле

$$\chi^2_{\text{набл}} = \sum_{i=1}^{s} (n_i^2 / n_i') - n, \tag{5.39}$$

где $n = \Sigma n_i = \Sigma n_i'$ — объем выборки. В нашем случае $n = 366$. Используя данные исходной таблицы, получаем:

$$\chi^2_{\text{набл}} = 36/3 + 169/14 + 1444/42 + 5476/82 + 11236/99 + 7225/76 +$$

$$+ 900/37 + 196/13 - 366 = 373{,}19 - 366 = 7{,}19.$$

Далее находим число степеней свободы $k = s - 3 = 8 - 3 = 5$ (число групп выборки минус один — это число степеней свободы распределения Пирсона — и минус еще два, так как нормальное распределение характеризуется двумя параметрами — математическим ожиданием и дисперсией). По таблице критических точек распределения χ^2 (см. Приложение 3) по уровню значимости $\alpha = 0{,}05$ и числу степеней свободы 5 находим критическое значение теста $\chi^2_{cr} = 11{,}1$. Так как $\chi^2_{\text{набл}} < \chi^2_{cr}$, то оснований отвергать нулевую гипотезу H_0 нет, т. е. расхождение эмпирических и теоретических частот незначимое. Иными словами, гипотеза о нормальном распределении генеральной совокупности не противоречит данным наблюдений.

Пример 15. Для выборки x_1, x_2, ..., x_n объема n для нормально распределенной генеральной совокупности проверить гипотезу H_0: математическое ожидание $m = m_0$ при двусторонней альтернативной гипотезе H_1: $m \neq m_0$. Уровень значимости α задан.

Решение. В качестве критерия проверки нулевой гипотезы примем, согласно формуле (5.35), случайную величину

$$T = (\bar{x} - m_0)\sqrt{n}/s,$$

где s — оценка среднего квадратического отклонения. Величина T имеет распределение Стьюдента с $n - 1$ степенями свободы. По таблице распределения Стьюдента, при заданном n, находим критическую точку $t_{1-\alpha,\, n-1} = t_p$, определяющую доверительный интервал

$$P(|T(n-1)| < t_p) = p = 1 - \alpha. \tag{5.40}$$

Тогда критическая область определяется неравенством $|T(n-1)| > t_p$. Гипотеза H_0 не отклоняется на уровне значимости α, если

$$|(\bar{x} - m_0)\sqrt{n}/s| < t_p, \tag{5.41}$$

или, что то же самое,

$$m_0 \in (\bar{x} - t_p\, s/\sqrt{n},\ \ \bar{x} + t_p s/\sqrt{n}).$$

В противном случае, если гипотетическое значение m_0 не покрывается доверительным интервалом с заданной надежностью p, то гипотеза H_0 отклоняется.

Пусть по выборке объема $n = 16$ найдены выборочное среднее $\bar{x} = 118{,}2$ и исправленное среднее квадратическое отклонение $s = 3{,}6$. При уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ проверим нулевую гипотезу H_0: $m = m_0 = 120$ при конкурирующей гипотезе H_1: $m \neq 120$. По таблице критических точек распределения Стьюдента из Приложения 4 находим $t_p = t\,(0{,}95,\ 15) = 2{,}15$. Далее проверяем выполнение неравенства (5.41):

$$|(118{,}2 - 120)\ 4/3{,}6\,| = 2.$$

Поскольку неравенство (5.41) выполняется, то гипотеза H_0 выполняется на уровне значимости 0,05 и отвергать ее нет оснований.

Пример 16. Для генеральных совокупностей X и Y, имеющих нормальные законы распределения, при заданном уровне значимости α, проверить гипотезу H_0: дисперсии этих совокупностей равны

$$D(X) = D(Y)$$

при альтернативной правосторонней гипотезе H_1: $D(X) > D(Y)$. Предполагается, что выборки являются независимыми.

Решение. Для проверки нулевой гипотезы нужно произвести выборки из данных генеральных совокупностей (пусть их объемы соответственно равны n_x и n_y). Затем рассчитываются несмещенные выборочные дисперсии s_x^2 и s_y^2 по формуле (5.11). Затем используют случайную величину — отношение большей исправленной дисперсии к меньшей

$$F = s_{\max}^2 / s_{\min}^2 , \tag{5.42}$$

которая имеет распределение Фишера–Снедекора с $k_1 = n_x - 1$ и $k_2 = n_y - 1$ степенями свободы. Далее для данных выборок выполняются следующие действия:

1) рассчитывается $F_{\text{набл}}$ по формуле (5.42);

2) по таблице критических точек распределения Фишера–Снедекора из Приложения 5 находится критическая точка $F_{\text{кр}}(\alpha, k_1, k_2)$;

3) сравниваются $F_{\text{набл}}$ и $F_{\text{кр}}(\alpha, k_1, k_2)$ и делается вывод. Если $F_{\text{набл}} < F_{\text{кр}}$, т. е. наблюдаемое значение критерия попало в область принятия гипотезы, то нет оснований отвергать нулевую гипотезу (расхождение между исправленными дисперсиями случайное). Если $F_{\text{набл}} > F_{\text{кр}}$, т. е. наблюдаемое значение критерия попало в критическую область, справедлива конкурирующая гипотеза H_1: $D(X) > D(Y)$ (расхождение между исправленными дисперсиями значимо).

Пусть для двух независимых выборок с объемами $n_x = 9$ и $n_y = 16$, извлеченных из нормально распределенных генеральных совокупностей X и Y найдены исправленные выборочные дисперсии $s_x^2 = 34{,}02$ и $s_y^2 = 12{,}15$. При уровне значимости $\alpha = 0{,}01$ проверим гипотезу о равенстве генеральных дисперсий. Для этого случая $k_1 = 8$ и $k_2 = 15$. Выполняя п. 1–3, последовательно находим $F_{\text{набл}} = 34{,}02/12{,}15 = 2{,}8$; $F_{\text{кр}}(0{,}01{,}8{,}15) = 4{,}0$. Так как $F_{\text{набл}} < F_{\text{кр}}$, то $F_{\text{набл}}$ попадает в область принятия гипотезы и нет оснований отвергать нулевую гипотезу (расхождение между исправленными выборочными дисперсиями случайные).

Глава 6

Регрессия и корреляция

6.1. Нелинейная регрессия

Если между экономическими явлениями существуют нелинейные соотношения, то они выражаются с помощью нелинейных функций.

Различают два *класса нелинейных регрессий*: регрессии, нелинейные относительно включенных в анализ объясняющих переменных, но линейные по оцениваемым параметрам, и регрессии, нелинейные по оцениваемым параметрам.

Примерами нелинейной регрессии по включаемым в нее объясняющим переменным являются следующие функции:

- полиномы разных степеней: $y = a + bx + cx^2 + \varepsilon$,

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + \varepsilon;$$

- *равносторонняя гипербола:* $y = a + b/x + \varepsilon$.

К нелинейным регрессиям по оцениваемым параметрам относятся функции:

- степенная: $y = ax^b\varepsilon$;
- показательная $y = ab^x\varepsilon$;
- экспоненциальная $y = e^{a + bx}\,\varepsilon$.

6.1.1. Нелинейные регрессии первого класса

Нелинейная регрессия по включенным переменным (первого класса) определяется, как и в линейной регрессии, методом наименьших квадратов (МНК), так как эти функции линейны по параметрам. Например, в параболе второй степени, которую запишем в виде

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \varepsilon, \tag{6.1}$$

заменяя переменные $x = x_1$, $x^2 = x_2$, получим двухфакторное уравнение линейной регрессии:

$$y = a_0 + a_1x + a_2x_2 + \varepsilon, \tag{6.2}$$

для оценки параметров которого используется МНК.

Соответственно для полинома третьего порядка

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \varepsilon, \tag{6.3}$$

при замене $x = x_1$, $x^2 = x_2$, $x^3 = x_3$ получим трехфакторную модель линейной регрессии вида:

$$y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \varepsilon \tag{6.4}$$

и т. д. В формулах (6.1)–(6.2) ε — погрешность.

Таким образом, полином любого порядка сводится к линейной регрессии с ее методами оценивания параметров и проверки гипотез. В экономических исследованиях чаще всего используется парабола второй степени; в отдельных случаях — полином третьего порядка.

Применение МНК для оценки параметров параболы второй степени приводит к следующей системе нормальных уравнений:

$$\begin{gathered} na_0 + a_1\Sigma\, x + a_2\Sigma\, x^2 = \Sigma\, y, \\ a_0\Sigma x + a_1\Sigma\, x^2 + a_2\Sigma\, x^3 = \Sigma\, xy, \\ a_0\Sigma\, x^2 + a_1\Sigma\, x^3 + a_2\Sigma\, x^4 = \Sigma\, x^2y. \end{gathered} \tag{6.5}$$

Система содержит три уравнения с тремя неизвестными коэффициентами a_0, a_1, a_2 и ее решение может быть произведено по формулам Крамера.

Пример 1. Данные результатов наблюдений представлены в таблице.

Таблица 6.1

X	–2	–1	0	1	2
Y	4,8	0,4	–3,3	–0,8	3,2

Определить методом наименьших квадратов параметры a_0, a_1, a_2 зависимости вида $y = a_0 + a_1x + a_2x^2$.

Решение. Составим вспомогательную таблицу и произведем расчеты, необходимые для составления системы нормальных уравнений.

Таблица 6.2

№	x	y	x^2	x^3	x^4	xy	x^2y
1	–2	4,8	4	–8	16	–9,6	19,2
2	–1	0,4	1	–1	1	–0,4	0,4
3	0	–3,3	0	0	0	0	0
4	1	–0,8	1	1	1	–0,8	–0,8
5	2	3,2	4	8	16	6,4	12,8
Σ	0	4,3	10	0	34	–4,4	31,6

На основании полученных результатов расчета система нормальных уравнений примет вид:

$$5a_0 + 0a_1 + 10a_2 = 4{,}3,$$

$$0a_0 + 10\,a_1 + 0a_2 = -4{,}4,$$

$$10a_0 + 0a_1 + 34a_2 = 31{,}6.$$

Решая систему по формулам Крамера, получим:

$$a_0 = -2{,}42,\ a_1 = -0{,}44,\ a_2 = 1{,}64.$$

Таким образом, уравнение примет вид:

$$Y = -2{,}42 - 0{,}44x + 1{,}64x^2.$$

Парабола второй степени при $b > 0$ и $c < 0$ симметрична относительно высшей точки, т. е. точки максимума, изменяющей направление связи, а именно — рост на падение. Такого рода функцию можно наблюдать в экономике труда при изучении зависимости заработной платы работников физического труда от возраста, с увеличением возраста повышается заработная плата ввиду одновременного увеличения опыта и повышения квалификации работника. Однако с определенного возраста ввиду старения организма и снижения производительности труда дальнейшее повышение возраста может приводить к снижению заработной платы работника.

При $b < 0$ и с > 0 парабола второго порядка симметрична относительно своей низшей точки, что позволяет определять минимум функции в точке, меняющей направление связи, т. е. снижение на рост.

Ввиду симметричности кривой парабола второй степени далеко не всегда пригодна в конкретных исследованиях, чаще имеют дело лишь с отдельными сегментами параболы.

К классу нелинейных функций, параметры которых оцениваются МНК, следует отнести равностороннюю гиперболу:

$$y = a + b/x + \varepsilon. \tag{6.6}$$

Она может быть использована на микро- и макроуровне, например, для характеристики связи удельных расходов сырья, материалов, топлива с объемом выпускаемой продукции, времени обращения товаров от величины товарооборота. Классическим ее примером является *кривая Филлипса,* английского экономиста, характеризующая соотношение между нормой безработицы и процентом прироста заработной платы.

Для равносторонней гиперболы (6.6) обозначим $z = 1/x$, получим линейное уравнение регрессии

$$Y = a + bz + \varepsilon,$$

оценка параметров которого может быть определена МНК. Система нормальных уравнений имеет вид:

$$\begin{gathered}\Sigma y = na + b\Sigma 1/x,\\ \Sigma y/x = a\Sigma 1/x + b\Sigma 1/x^2.\end{gathered} \tag{6.7}$$

При $b > 0$ имеем обратную зависимость, которая при $x \to \propto$ характеризуется нижней асимптотой.

При $b < 0$ имеем медленно повышающуюся функцию с верхней асимптотой при $x \to \infty$.

Примером такой зависимости может служить взаимосвязь доли расходов на товары длительного пользования и общих сумм расходов (доходов). Математическое описание подобного рода взаимосвязей получило название *кривых Энгеля.* В 1857 г. немецкий статистик Э. Энгель на основе исследования семейных расходов сформулировал закономерность — с ростом дохода доля доходов, расходуемых на продовольствие, уменьшается. Соответственно с увеличением дохода доля доходов, расходуемых на непродовольственные товары, будет возрастать. Однако это увеличение не беспредельно, ибо на все товары сумма долей не может быть больше единицы.

6.1.2. Нелинейные регрессии второго класса

Рассмотрим регрессию, нелинейную по оцениваемым параметрам (второго класса). Данный класс нелинейных моделей подразделяется на два типа: *нелинейные модели внутренне линейные* и *нелинейные модели внутренне нелинейные*. Если нелинейная модель внутренне линейна, то она с помощью соответствующих преобразований может быть приведена к линейному виду. Если же нелинейная модель внутренне нелинейная, то она не может быть сведена к линейной функции. Например, в эконометрических исследованиях при изучении эластичности спроса от цен широко используется степенная функция:

$$y = a \cdot x^{b} \cdot \varepsilon, \tag{6.8}$$

где y — спрашиваемое количество;

x — цена;

ε — случайная ошибка.

Модель нелинейная относительно оцениваемых параметров, ибо включает параметры a и b неаддитивно. Однако ее можно считать внутренне линейной, так как логарифмирование данного уравнения приводит его к линейному виду:

$$\ln y = 1na + b \ln x + \ln\varepsilon. \tag{6.9}$$

Оценки параметров a и b уравнения (6.9) могут быть найдены МНК. Система нормальных уравнений имеет вид:

$$\Sigma \ln y = n \ln a + b\Sigma \ln x,$$

$$\Sigma \ln y \ \ln x = \ln a \, \Sigma \ln x + b \, \Sigma (\ln x)^2.$$

Параметр b определяется из системы, а параметр a — потенцированием выражения $\ln a$.

При этом предполагается, что случайная ошибка ε функции (6.9) *мультипликативно* связана с объясняющей переменной x. Если же модель представить в виде

$$Y = a \cdot x^{b} + \varepsilon,$$

то она становится внутренне нелинейной, так как ее невозможно превратить в линейный вид.

К внутренне нелинейной относится модели вида

$$Y = a + b\, x^{c} + \varepsilon, \tag{6.10}$$

$$y = a\,[1 - 1/(1 - x^{b})] + \varepsilon. \tag{6.11}$$

Эти уравнения не могут быть преобразованы в уравнения, линейные по коэффициентам.

Если модель внутренне нелинейна по параметрам, то для оценки параметров используются итеративные процедуры, успешность которых зависит от вида уравнений и особенностей применяемого итеративного подхода. Модели, внутренне нелинейные по параметрам, могут иметь место в эконометрических исследованиях. Однако гораздо большее распространение получили модели, приводимые к линейному виду. Решение такого типа моделей реализовано в стандартных пакетах прикладных программ.

Из нелинейных функций, которые могут быть приведены к линейному виду, широко используется степенная функция $y_x = ax^b$. Это объясняется тем, что параметр b в ней является *коэффициентом эластичности*, показывающим, на сколько процентов изменится в среднем результат, если фактор изменится на 1%. Коэффициент эластичности вычисляется по формуле

$$Э = f'(x)x/y, \tag{6.12}$$

где $Э$ — коэффициент эластичности;

$f(x)$ — первая производная функции.

Коэффициент эластичности можно определять и при наличии других форм связи, но только для степенной функции он представляет собой постоянную величину, равную параметру b. В других функциях коэффициент эластичности зависит от значений фактора x. Например, для линейной регрессии $y = a + b\,x$ имеем:

$$f'(x) = b,\ Э = bx/(a + bx).$$

В силу того, что коэффициент эластичности для линейной функции не является величиной постоянной, а зависит от соответствующего значения x, то обычно рассчитывается *средний показатель эластичности*

$$Э = bx/y.$$

Несмотря на широкое использование в эконометрике коэффициентов эластичности, возможны случаи, когда их расчет экономического смысла не имеет. Это происходит тогда, когда для рассматриваемых признаков бессмысленно определение изменения значений в процентах. Например, вряд ли кто будет определять, на сколько процентов изменится урожайность пшеницы, если качество почвы, измеряемое в баллах, изменится на 1%. В такой ситуации степенная функция, даже если она оказывается наилучшей по формальным соображениям (исходя из наименьшего значения остаточной вариации), не может быть экономически интерпретирована.

В моделях, нелинейных по оцениваемым параметрам, но приводимых к линейному виду, МНК применяется к преобразованным уравнениям.

Если в линейной модели и моделях, нелинейных по переменным, при оценке параметров исходят из критерия

$$\Sigma\,(y - y_x) \to \min,$$

то в моделях, нелинейных по оцениваемым параметрам, требование МНК применяется не к исходным данным результативного признака, а к их преобразованным величинам $\ln y$, $1/x$. Это значит, что оценка параметров основывается на минимизации суммы квадратов отклонений в логарифмах.

Вследствие этого оценка параметров для линеаризуемых функций МНК оказывается несколько смещенной.

Практическое применение экспоненты возможно, если результативный признак не имеет отрицательных значений. Поэтому если исследуется, например, финансовый результат деятельности предприятий, среди которых наряду с прибыльными есть и убыточные, то данная функция не может быть использована.

6.2. Нелинейная корреляция

Уравнение нелинейной регрессии, так же как и в линейной зависимости, дополняется показателем корреляции, а именно *индексом корреляции* (R):

$$R = [1 - (\sigma^2_{\text{ост}} / \sigma^2_y)], \tag{6.13}$$

где σ^2_y — общая дисперсия результативного признака y;

$\sigma^2_{\text{ост}}$ — остаточная дисперсия, определяемая из уравнения регрессии $y_x = f(x)$,

так как $\sigma^2_y = [\Sigma\,(y - y)^2]/n$, а $\sigma^2_{\text{о–т}} = [\Sigma\,(y - y_x)^2]/n$, то

$$R = \sqrt{[1 - (\Sigma\,(y - y_x)^2 / \Sigma\,(y - y)^2)}. \tag{6.14}$$

Индекс корреляции находится в границах: $0 \le R \le 1$, и чем ближе к единице, тем теснее связь рассматриваемых признаков, более надежно найденное уравнение регрессии.

Пример 2. Вычислить индекс корреляции на основании данных примера 1. Результаты вычислений приведены в таблице.

Таблица 6.3

№	x	y	y_x	$y - y_x$	$(y - y_x)^2$	$y - y$	$(y - y)^2$
1	–2	4,8	5,02	–0,22	0,0484	3,94	15,5236
2	–1	0,4	–0,34	0,74	0,5476	–0,46	0,2116
3	0	–3,3	–2,42	–0,88	0,7744	–4,16	17,3056
4	1	–0,8	–1,22	0,42	0,1764	–1,66	2,7556
5	2	3,2	3,26	–0,06	0,0036	2,34	5,4756
Σ	0	4,3			1,5504		41,272

Значения y_x определим путем подстановки в полученное в примере 1 выражение

$$y_x = -2{,}42 - 0{,}44x + 1{,}64x^2$$

соответственно значений x, равных −2, −1, 0, 1, 2. Получим:

$$y_1 = -2{,}42 - 0{,}44\,(-2) + 1{,}64\,(-2)^2 = 5{,}02.$$

Аналогично находим y_2, y_3, y_4, y_5.

Вычислим индекс корреляции по формуле (6.14)

$$R = \sqrt{1 - (1{,}5504/41{,}272)} = 0{,}981.$$

Индекс корреляции близок к единице, поэтому можно сделать вывод о достаточно тесной связи между заданными величинами.

Парабола второй степени, как и полином более высокого порядка, при линеаризации принимает вид уравнения множественной регрессии. Если же нелинейное относительно объясняемой переменной уравнение регрессии при линеаризации принимает форму линейного уравнения парной регрессии, то для оценки тесноты связи может быть использован линейный коэффициент корреляции, величина которого в этом случае совпадет с индексом корреляции $R_{yx} = r_{yz}$, где z — преобразованная величина признака-фактора, например $z = 1/x$ или $z = \ln x$.

Иначе обстоит дело, когда преобразования уравнения в линейную форму связаны с зависимой переменной. В этом случае линейный коэффициент корреляции по преобразованным значениям признаков дает приближенную оценку тесноты связи и не совпадает с индексом корреляции. Например, для степенной функции $y_x = a\,x^b$ после перехода к линейному уравнению $\ln y = \ln a + b \ln x$ может быть вычислен линейный коэффициент корреляции не для фактических переменных x и y, а для их логарифмов.

Не совпадают данные показатели и для уравнения регрессии в виде экспоненты, так как при преобразовании в линейную форму рассчитывается линейный коэффициент корреляции между x и $\ln y$. При использовании в преобразовании нелинейных соотношений в линейную форму обратных значений результативного признака, т. е. $1/y$, индекс корреляции R_{yx} также не будет совпадать с линейным коэффициентом корреляции.

Следует иметь в виду, что если при линейной зависимости признаков один и тот же коэффициент корреляции характеризует регрессию как $y_x = a + bx$, так и $x_y = A + By$, так как $r_{yx} = r_{xy}$, то при криволинейной зависимости R_{yx} для функции $y = f(x)$ не равен R_{xy} для регрессии $x = f(y)$.

Поскольку в расчете индекса корреляции используется соотношение факторной и общей суммы квадратов отклонений, то R^2 имеет тот же смысл, что и коэффициент детерминации.

Оценка существенности индекса корреляции проводится, так же как и оценка надежности линейного коэффициента корреляции.

Индекс детерминации используется для проверки существенности в целом уравнения нелинейной регрессии по F-критерию Фишера:

$$F = [R^2/(1 - R^2)][(n - m - 1)/m] \tag{6.15}$$

где R^2 — индекс детерминации;

n — число наблюдений;

m — число параметров при переменных x.

Величина m характеризует число степеней свободы для факторной суммы квадратов, а $(n - m - 1)$ — число степеней свободы для остаточной суммы квадратов.

Для степенной функции $y_x = a\,x^b m = 1$ и формула для определения F-критерия примет тот же вид, что и при линейной зависимости:

$$F = R^2\,(n - 2)/(1 - R^2). \tag{6.16}$$

Для параболы второй степени $y = a + bx + cx^2 + \varepsilon$ и $m = 2$

$$F = R^2\,(n - 3)/2\,(1 - R^2). \tag{6.17}$$

Пример 3. Зависимость потребления продукта A от среднедушевого дохода по данным 20 семей характеризуется следующими данными:

уравнение регрессии $y_x = 2\,x^{0,3}$;

индекс корреляции $\rho_{xy} = 0,9$;

остаточная дисперсия $\sigma^2_{\text{ост}} = 0,06$.

Провести дисперсионный анализ полученных результатов.

Решение. Результаты расчета приведены в табл. 6.4.

Таблица 6.4

Вариация результата y	Число степеней свободы	Сумма квадратов отклонений	Дисперсия на одну степень свободы	$F_{\text{факт}}$	$F_{\text{табл}}$ $\alpha = 0,05$, $\kappa_1 = 1$, $\kappa_2 = 18$
Общая	$n - 1 = 19$	6,316	–-	–	–
Факторная	$\kappa_1 = m = 1$	5,116	5,116	76,7	4,41
Остаточная	$\kappa_2 = n - m - 1 = 18$	1,2	0,0667	–	–

$$S_{\text{ост}} = \sigma^2_{\text{ост}}\, n = 0,06 \cdot 20 = 1,2;$$

$$S_{\text{общ}} = S_{\text{ост}}/(1 - \rho^2_{xy}) = 1,2/(1 - 0,81) = 6,316;$$

$$S_{\text{факт}} = 6,316 - 1,2 = 5,116;$$

$$F_{\text{факт}} = 0,9^2 \cdot 18/(1 - 0,9^2) = 76,7.$$

Ответ. В силу того, что $F_{\text{факт}} = 76,7 > F_{\text{табл}} = 4,4$, то гипотеза о случайности различий факторной и остаточной дисперсий отклоняется. Эти различия существенны, статистически значимы, уравнение надежно, значимо, показатель тесноты связи надежен и отражает устойчивую зависимость потребления продукта A от среднедушевого дохода.

6.3. Множественная регрессия

6.3.1. Нормальная линейная модель множественной регрессии

Обобщением линейной регрессии с двумя переменными является модель множественной регрессии, которую можно представить в виде

$$y_i = b_0 + b_1 x_{1i} + b_2 x_{2i} + \ldots + b_j x_{ji} + \ldots + b_k x_{ki} + \varepsilon_i, \tag{6.18}$$

где y_i — значение зависимой переменной для i-го наблюдения $(i = \overline{1, n})$;

b_0 — свободный член;

b_j — коэффициент при j-м факторе ($j = \overline{1,\ k}$);

x_{ji} — значение j-го фактора независимой или объясняющей переменной для i-го наблюдения;

ε_i — случайная составляющая зависимой переменной i-го наблюдения.

Для многомерной регрессионной модели имеют место следующие предпосылки:

Переменные x_{1i}, x_{2i}, ..., x_{ji}, ..., x_{ki} — величины неслучайные.

Математическое ожидание случайной составляющей в любом наблюдении равно нулю:

$$M\,(\varepsilon_i) = 0.$$

Дисперсия случайной составляющей постоянна для всех наблюдений:

$$D\,(\varepsilon_i) = \delta_2 = \text{const}.$$

Отсутствие систематической связи между значениями случайной составляющей в любых двух наблюдениях:

$$M(\varepsilon_i \cdot \varepsilon_j) = cov\,(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0 \quad (i \neq j).$$

Случайная составляющая ε_i — нормально распределенная случайная величина.

Модель линейной множественной регрессии (6.18), для которой выполняются вышеуказанные предпосылки, называется *нормальной* (классической) линейной регрессионной моделью.

Факторы, включаемые во множественную регрессию, должны быть количественно измеримы и не должны сильно коррелировать друг с другом. Кроме того, каждый фактор должен быть тесно связан с результатом. Коэффициент парной линейной корреляции фактора и результата должен существенно отличаться от нуля.

В матричной форме нормальная регрессионная модель (6.18) записывается в виде:

$$y = xb + \varepsilon;$$

где y — матрица-столбец или вектор значений зависимой переменной размерности ($n \times 1$);

x — матрица значений независимых переменных размерности $\{n \times \times (k + 1)\}$.

Добавление 1 к общему числу факторов k учитывает свободный член b_0 уравнении регрессии.

b — матрица-столбец или вектор размерности $\{k + 1) \cdot 1\}$ неизвестных, подлежащих оценке параметров модели;

ε — случайный вектор — столбец размерности $(n \cdot 1)$ ошибок наблюдений.

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_i \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}_{n\times 1}; \; x = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & \dots & x_{k1} \\ & & \dots & \\ 1 & x_{1i} & \dots & x_{ki} \\ & & \dots & \\ 1 & x_{1n} & \dots & x_{kn} \end{pmatrix}_{n\times(k+1)}; \; b = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \dots \\ b_j \\ \dots \\ b_k \end{pmatrix}_{(k+1)\times 1}; \; \varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \dots \\ \varepsilon_i \\ \dots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}_{n\times 1}.$$

6.3.2. Оценка параметров нормальной модели множественной регрессии

Основная задача регрессионного анализа заключается в нахождении по выборке объемов и оценки неизвестных коэффициентов регрессии b_0, b_1, ..., b_k модели.

Оценка параметров многомерной модели, аналогично парной регрессии, осуществляется методом наименьших квадратов (МНК). В качестве оценки вектора $\bar{b}$ принимают вектор b, линии минимизирующий сумму квадратов отклонений наблюдаемых значений y_i от рассчитанных по модели $\hat{y}_i$.

В матричной форме функционал S имеет вид:

$$S = (y - xb)^T (y - xb) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}) \to \min\ldots \tag{6.19}$$

оценки находятся по формулам:

$$b = (x^T x)^{-1} x^T y. \tag{6.20}$$

Так, для двухфакторной линейной модели

$$y_i = b_0 + b_1 x_{1i} + b_2 + b_2 x_{2i} + \varepsilon_i, \quad i = \overline{1, n},$$

$$S=\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\widehat{y}_i\right)^2=\sum_{i=1}^{n}(y_i-(b_0+b_1x_{1i}+b_2x_{2i}))^2 \to \min\ldots \quad (6.21)$$

Из выражения (6.21) следует, что функционал S является функцией переменных b_0, b_1, b_2.

Для нахождения экстремума функционала S найдем частные производные по этим переменным и приравняем их к нулю.

$$\frac{\partial S}{\partial b_0}=0,\quad \frac{\partial S}{\partial b_1}=0,\quad \frac{\partial S}{\partial b_2}=0.$$

Получим систему нормальных линейных уравнений вида:

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{n}y_i=b_0n+b_1\sum_{i=1}^{n}x_{1i}+b_2\sum_{i=1}^{n}x_{2i},\\ c\sum_{i=1}^{n}y_ix_{1i}=b_0\sum_{i=1}^{n}x_{1i}+b_1\sum_{i=1}^{n}x^{2_{1i}}+b_2\sum_{i=1}^{n}x_{2i}x_{1i},\\ \sum_{i=1}^{n}y_ix_{2i}=b_0\sum_{i=1}^{n}x_{2i}+b_1\sum_{i=1}^{n}x_{1i}x_{2i}+b_2\sum_{i=1}^{n}x_{2i}^2\end{cases}$$

Теорема Гаусса, сформулированная для парной регрессионной модели, является верной и для модели множественной регрессии (6.18).

Пример 4. Имеются данные по трем показателям, приведенным в таблице. Оценить параметры линейной множественной регрессии.

i	y	x_1	x_2	yx_1	yx_2	x_1^2	x_2^2	x_1x_2	y^2
1	330	25	14	8250	4620	625	196	350	108900
2	360	32	16	11520	5760	1024	256	512	129600
3	320	30	13	960	4160	900	169	390	102400
4	280	28	8	7840	2240	784	64	224	78400
5	240	23	6	5520	1440	529	36	138	57600
6	380	35	17	13300	6460	1225	289	595	144400
7	400	38	19	15200	7600	1444	361	722	160000
8	360	36	16	12960	5760	1296	256	576	129600
9	320	31	14	9920	4480	961	196	434	102400
10	400	39	20	15600	8000	1521	400	780	160000
11	280	27	9	7560	2520	729	81	243	78400
12	420	40	21	16800	8820	1600	441	840	176400

i	y	x_1	x_2	yx_1	yx_2	x_1^2	x_2^2	x_1x_2	y^2
13	220	24	5	5280	1100	576	25	120	48400
14	380	37	18	14060	6840	1369	324	666	144400
15	200	22	4	4400	800	484	16	88	40000
16	300	29	13	8700	3900	841	169	377	90000
17	360	34	15	12240	5400	1156	225	510	129600
18	320	33	12	10560	3840	1089	144	396	102400
19	260	26	7	6760	1840	676	49	182	67600
20	220	21	4	4620	880	441	16	84	48400
Σ	6350	610	251	192050	86460	19270	3713	8227	2098900

Решение. Предположим, что между переменными y, x_1 и x_2 существует линейная корреляционная зависимость. Найдем уравнение регрессии y по x_1 и x_2. Оценки параметров линейного двухфакторного уравнения регрессии вида (6.14) определим матричным способом. Обозначим

$$y = \begin{pmatrix} 330 \\ 360 \\ \ldots \\ 220 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 1 & 25 & 14 \\ 1 & 32 & 16 \\ & \ldots & \\ 1 & 21 & 4 \end{pmatrix}.$$

Для удобства вычислений составляем вспомогательную таблицу.

По правилу умножения матриц вычислим

$$x^T x = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & 1 \\ 25 & 32 & \ldots & 21 \\ 14 & 16 & & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 25 & 14 \\ 1 & 32 & 16 \\ & \ldots & \\ 1 & 21 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 610 & 251 \\ 610 & 19270 & 8227 \\ 251 & 8227 & 3713 \end{pmatrix}.$$

Найдем обратную матрицу, которую обозначим $(x^Tx)^{-1}$. По определению, матрицей, обратной к матрице A, называется матрица A^{-1}, такая, что $AA^{-1} = Y$, где Y — единичная матрица. Обозначим a_{ij} элементами матрицы A^{-1}. Тогда $a_{ij} = \dfrac{(-1)^{i+j} M_{ij}}{|A|}$, где M_{ij} — матрица, получающаяся из A вычеркиванием i-й строки и j-го столбца $|A|$ — определитель матрицы x^Tx.

Для рассматриваемого примера

$$|A|=\begin{vmatrix}20 & 610 & 251\\ 610 & 19270 & 8227\\ 251 & 8227 & 3713\end{vmatrix}=955000.$$

$$M_{11}=\begin{vmatrix}19\,270 & 8227\\ 8227 & 3713\end{vmatrix}=3\,865\,981,$$

$$M_{12}=\begin{vmatrix}610 & 8227\\ 251 & 3713\end{vmatrix}=199\,953 \text{ и т. д.}$$

$$M_{33}=\begin{vmatrix}20 & 610\\ 610 & 19\,270\end{vmatrix}=13\,300.$$

$$a_{11}=(-1)^2\frac{M_{11}}{|A|}=\frac{3\,865\,981}{955\,000}=4{,}048,$$

$$a_{12}(-1)^3\frac{M_{12}}{|A|}=\frac{199\,953}{955\,000}=-0{,}209 \text{ и т. д.}$$

$$a_{33}=(-1)^6\frac{M_{33}}{|A|}=\frac{13\,300}{955\,000}=0{,}014.$$

В результате получим обратную матрицу.

$$(x^T x)^{-1}=\begin{pmatrix}20 & 610 & 251\\ 610 & 19270 & 8227\\ 251 & 8227 & 3713\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}4{,}048 & -0{,}209 & 0{,}190\\ -0{,}209 & 0{,}012 & -0{,}012\\ 0{,}190 & -0{,}012 & 0{,}014\end{pmatrix}.$$

По правилу умножения матриц вычислим $x^T y$.

$$x^T y=\begin{pmatrix}1 & 1 & & 1\\ 25 & 32 & \dots & 21\\ 14 & 16 & & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}330\\ 360\\ \dots\\ 220\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6350\\ 192050\\ 86460\end{pmatrix}.$$

Вектор оценок коэффициентов регрессии равен:

$$\bar{b}=(x^T x)^{-1}x^T y=\begin{pmatrix}4{,}048 & -0{,}209 & 0{,}190\\ -0{,}209 & 0{,}012 & -0{,}012\\ 0{,}190 & -0{,}012 & 0{,}014\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6350\\ 192050\\ 86460\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1993{,}75\\ -60{,}07\\ 112{,}34\end{pmatrix}.$$

Таким образом, $b_0 = 1993{,}75$; $b_1 = -60{,}07$; $b_2 = 112{,}34$.

Ответ.

Уравнение множественной регрессии примет вид:

$$\hat{y} = 1993{,}75 - 60{,}07x_1 + 112{,}34x_2.$$

6.4. Некоторые особенности множественной регрессии и корреляции

Множественная регрессия представляет регрессию результативного признака с двумя или большим числом независимых переменных вида

$$Y = f(x_1, x_2, ..., x_k).$$

В уравнении регрессии случайная величина y зависит не только от значений независимых переменных $x_1, x_2, ..., x_k$, но и от ряда других факторов, влияющих на y, которые не могут быть проконтролированы. В связи с этим

$$Y = f(x_1, x_2, ..., x_k) + e,$$

где e — случайная величина, характеризующая отклонения результативного признака от теоретического, найденного по уравнению регрессии.

При исследовании зависимости результативного признака y от ряда факторов $x_1, x_2, ..., x_k$ необходимо решать такие же задачи, что и при парной связи двух переменных x и y:

- определение вида регрессии;
- оценка параметров;
- определение тесноты связи, если переменные x и y случайные величины.

Однако наряду с этими задачами необходимо рассматривать и ряд задач, характерных лишь для множественной регрессии и корреляции.

К таким задачам относится отбор факторов $x_1, x_2, ..., x_k$, существенно влияющих на фактор y, при наличии возможностей внутренней взаимосвязи между переменными $x_1, x_2, ..., x_k$. Такой отбор требует прежде всего глубокого теоретического и практического знания качественной стороны рассматриваемых экономических явлений.

Отбор факторов осуществляется обычно в несколько этапов. Сначала отбираются факторы, связанные с изучаемым явлением на основе данных теоретического исследования (экономическая теория, заключения специалиста и т. д.). При этом для построения множественной регрессии и корреляции отбираются факторы, которые могут быть количественно измеримы.

Далее отобранные факторы подвергаются математико-статистической проверке существенности их влияния на изучаемый показатель. Такая проверка, как правило, включает анализ матрицы парных корреляций, частных корреляций, проверка существенности (значимости) коэффициентов регрессии на основе t-критерия, анализ остатков (отклонений) и т. д.

Особенностью множественной регрессии и корреляции является необходимость различать случаи корреляционной множественной связи, когда переменные $x_1, x_2, ..., x_k$ — случайные величины; регрессионной, если переменные $x_1, x_2, ..., x_k$ — неслучайные величины, а также смешанный случай, когда некоторые из переменных — случайные величины, другие — неслучайные. В случае корреляционной зависимости следует вычислять и интерпретировать коэффициенты корреляции, при регрессионной зависимости — это не имеет смысла, а при наличии как случайных, так и неслучайных переменных коэффициенты корреляции следует вычислять только между случайными переменными.

6.4.1. Отбор факторов и методы построения множественной линейной корреляционной и регрессионной зависимости

Рассмотрим отбор факторов для построения множественной линейной зависимости, когда переменные $y, x_1, x_2, ..., x_p$ являются случайными величинами (обычно предполагается, что их совместное распределение нормальное).

Наиболее простой формой зависимости и достаточно строго обоснованной для случая совместного нормального распределения является линейная, т. е. зависимость вида

$$y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_px_p. \qquad (6.22)$$

Такая зависимость во многих случаях достаточно хорошо отражает сложившиеся экономические взаимосвязи. Исходная информация для построения зависимости (6.22) обычно задается в виде некоторой таблицы вида:

№	Факторы, для которых получены данные					
	x_1	x_2	x_3	...	x_k	y
1	x_{11}	x_{21}	x_{31}	...	x_{k1}	y_1
2	x_{12}	x_{22}	x_{32}	...	x_{k2}	y_2
3	x_{13}	x_{23}	x_{33}	...	x_{k3}	y_3
...	...	...	...	...	...	...
N	x_{1n}	x_{2n}	x_{3n}	...	x_{kn}	y_n

Следует определить, все ли переменные следует включать в уравнение (6.22) или есть переменные, которые существенно не влияют на величину y, их нецелесообразно включать в (6.22). В первом случае $p = k$, во втором $p < k$.

Для решения этого часто используется таблица, составленная из коэффициентов парной корреляции. Элементами такой таблицы являются коэффициенты парной корреляции для всех k факторов. Таблица имеет вид:

	y	x_1	x_2	x_3	...	x_k
y	1	r_{yx_1}	r_{yx_2}	r_{yx_3}	...	r_{yx_k}
x_1	r_{x_1y}	1	$r_{x_1x_2}$	$r_{x_1x_3}$	...	$r_{x_1x_k}$
x_2	r_{x_2y}	$r_{x_2x_1}$	1	$r_{x_2x_3}$	...	$r_{x_2x_k}$
x_3	r_{x_3y}	$r_{x_3x_1}$	$r_{x_3x_2}$	1	...	$r_{x_3x_k}$
...	...	...	...	...	...	...
x_k	r_{x_ky}	$r_{x_kx_1}$	$r_{x_kx_2}$	...	...	1

В клетках таблицы записаны парные коэффициенты корреляции, она имеет вид:

	y	x_1	x_2	x_3	...	x_k
y	1	r_{yx_1}	r_{yx_2}	r_{yx_3}	...	r_{yx_k}
x_1	—	1	$r_{x_1x_2}$	$r_{x_1x_3}$	...	$r_{x_1x_k}$
x_2	—	—	1	$r_{x_2x_3}$	...	$r_{x_2x_k}$
x_3	—	—	—	1	...	$r_{x_3x_k}$
...	...	...	...	...	...	...
x_k	—	—	—	—	...	1

По данным такой таблицы можно примерно оценить, какие факторы существенно влияют на переменную y, а какие — несущественно, а также выявить взаимосвязь между факторами.

Пример 5. Пусть получена таблица:

	y	x_1	x_2	x_3
y	1	0,6	0,5	0,7
x_1		1	0,04	0,03
x_2			1	0,1
x_3				1

На основании указанных в таблице парных коэффициентов корреляции можно сделать вывод, что связь факторов x_1, x_2, x_3 с фактором y существенная (коэффициенты корреляции соответственно 0,6; 0,5; 0,7). Теснота связи между факторами x_1, x_2, x_3 незначительная (коэффициенты корреляции 0,04, 0,03, 0,1).

Такая информация наиболее благоприятна для построения уравнения (6.22).

Рассмотрим следующую таблицу:

	y	x_1	x_2	x_3	x_4
y	1	0,65	0,6	0,5	0,03
x_1		1	0,5	0,9	0,3
x_2			1	0,3	0,2
x_3				1	0,2
x_4					1

Согласно таблице, величина коэффициента парной корреляции между y и x_4 мала, в связи с этим нецелесообразно включать фактор x_4 в уравнение (6.22). Высок коэффициент парной корреляции между переменными x_1 и x_3 (коэффициент корреляции 0,9), что показывает их тесную корреляционную взаимосвязь. В этом случае не включают одновременно в уравнение (6.22) x_1 и x_3, а вводят один из них в зависимости от их смысла и мнения исследователя. Нецелесообразно включать в уравнение одновременно показатели, представляющие сумму некоторых факторов или их составных частей, а также характеризующие один и тот же фактор, выраженный в различных единицах измерения, например, абсолютных и относительных.

Обычно кроме анализа таблицы парных коэффициентов корреляции для отбора существенных факторов вычисляют частные коэффициенты корреляции, определяют надежность полученных коэффициентов регрессии по t-критерию и другие методы.

При анализе последней таблицы парных коэффициентов корреляции связи можно обратить внимание, что связи между изучаемыми переменными довольно сложным образом переплетаются между собой. Поэтому целесообразно рассмотреть вопрос о взаимосвязи между факторам при условии, что некоторые или все остальные факторы остаются неизменными.

Для выявления такой взаимосвязи используются коэффициенты *частной корреляции.*

Вычислим коэффициент частной корреляции между факторами y и x_1 при условии, что фактор x_2 закреплен на постоянном уровне (остается неизменным), тогда он равен

$$R_{yx_1(x_2)} = \frac{R_{yx_1} - R_{yx_2} R_{x_1x_2}}{\sqrt{1 - R^2_{yx_2}} \sqrt{1 - R^2_{x_1x_2}}}. \tag{6.23}$$

Если закреплен лишь один фактор, то такой коэффициент называется *коэффициентом частной корреляции первого порядка.* Если закреплены два фактора, то — *второго порядка* и т. д. Тогда обычный коэффициент парной корреляции можно называть *частным коэффициентом корреляции нулевого порядка.*

В выражении (6.23) коэффициент первого порядка (закреплен один фактор x_2 в скобках) выражается через коэффициенты нулевого порядка.

Коэффициенты частной корреляции второго порядка можно выразить через коэффициенты первого порядка при помощи соотношения

$$r_{yx_1(x_2x_3)} = \frac{r_{yx_1(x_2)} - r_{yx_3(x_2)} r_{x_1x_3(x_2)}}{\sqrt{1 - r^2_{yx_3(x_2)}} \sqrt{1 - r^2_{x_1x_3(x_2)}}} \tag{6.24}$$

Аналогично можно записать соотношения, выражающие коэффициент частной корреляции K-го порядка через коэффициенты $K - 1$ порядка.

Следует отметить, что малость коэффициентов частной корреляции низших порядков не гарантирует малости коэффициентов более высокого порядка. Например, r_{yx_1} и $r_{yx_1(x_2)}$ могут быть оба малыми, а $r_{yx_1(x_2)}$ может быть велик.

Предположим, $r_{yx_2} = 0$, тогда (6.23) запишется в виде

$$r_{yx_1(x_2)} = \frac{r_{yx_1}}{\sqrt{1 - r^2_{x_1 x_2}}}, \tag{6.25}$$

если r_{yx_1} мал, а $r_{x_1 x_2}$ велик, то $r_{yx_1(x_2)}$ может быть также большим.

Пример 6. Дано $r_{yx_1} = 0{,}095$, $r_{x_1 x_2} = 0{,}994$, вычислить $r_{yx_1(x_2)}$.

Решение.

$$r_{yx_1(x_2)} = 0{,}095 \Big/ \sqrt{1 - 0{,}99} = 0{,}95.$$

Коэффициенты частной корреляции изменяются по абсолютной величине от 0 до 1.

После предварительного отбора факторов на основе парных и частных коэффициентов корреляции производятся оценки параметров a_0, a_1, ..., a_p. Обычно они осуществляются по методу наименьших квадратов (МНК). Система нормальных уравнений в случае линейной зависимости (6.23) имеет вид

$$a_0 n + a_1 \Sigma\, x_{1i} + a_2 \Sigma\, x_{2i} + \ldots + a_p\, \Sigma\, x_{pi} = \Sigma\, y_i\,,$$

$$a_0 \Sigma\, x_{1i} + a_1 \Sigma\, x_{1i}{}^2 + a_2\, \Sigma\, x_{1i}\, x_{2i} + \ldots + a_p\, \Sigma\, x_{1i}\, x_{pi} = \Sigma\, x_{1i} y_i\,,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_0\, \Sigma\, x_{pi} + a_1\, \Sigma\, x_{1i}\, x_{pi} + a_2\, \Sigma\, x_{pi}\, x_{2i} + \ldots + a_p\, \Sigma\, x_{pi}{}^2 = \Sigma\, x_{pi}\, y_i\,.$$

Решение такой системы может осуществляться по теореме Крамера (с использованием определителей), методом Гаусса (последовательным исключением неизвестных) и другими методами.

Для определения тесноты связи между фактором y и совокупностью факторов x_1, x_2, ..., x_p в случае линейной зависимости применяется *коэффициент множественной корреляции* R. Коэффициент изменяется в интервале от 0 до 1, причем в отличие от коэффициентов парной корреляции он берется всегда по абсолютной величине. Если $R = 0$, то нет линейной корреляционной связи между y и x_1, x_2, ..., x_p. Если $R = 1$, то связь функциональная. Выражение, по которому вычисляют коэффициент корреляции, имеет вид

$$R = \sqrt{\frac{a_1 r_{yx_1}\, \delta_{x_1} + a_2 r_{yx_2}\, \delta_{x_2} + \ldots + a_p r_{yx_p}\, \delta_{x_p}}{\delta_y}} \tag{6.26}$$

где a_i — коэффициенты регрессии уравнения (6.24);

r_{yx_i} — парные коэффициенты корреляции;

σ_{x_i} — среднее квадратическое оклонение фактора x_i;

σ_y — среднее квадратическое отклонение y.

Обычно интерпретируется не сам коэффициент корреляции R, а его квадрат R^2, который называется *коэффициентом множественной (общей) детерминации*. Последний показывает, какая часть общей дисперсии объясняется за счет вариации, линейной комбинации аргументов $x_1, x_2, ..., x_p$ при данных значениях коэффициентов регрессии.

Например, если коэффициент множественной корреляции $R = 0{,}7$, то коэффициент множественной детерминации $R^2 = 0{,}49$, т. е. 49% вариации объясняется факторами, включенными в уравнение регрессии, а 51% — прочими факторами.

Существенность отличия от нуля выборочного коэффициента множественной корреляции проверяется на основе F-критерия (критерий Фишера). Вычисляется величина

$$F = [R^2\,(n - p - 1)/(1 - R^2)p], \tag{6.27}$$

где R — множественный коэффициент корреляции;

p — число факторов $x_1, x_2, ..., x_p$;

n — число наблюдений.

Найденное значение критерия F сравнивается с $F_{\text{табл.}}$ (см. Приложение) при числе степеней свободы $v_1 = p$, $v_2 = n - p - 1$ и заданном уровне значимости α. Если расчетное значение $F > F_{\text{табл.}}$, т. е. превышает табличное, гипотеза о равенстве коэффициента множественной корреляции нулю отвергается и связь считается существенной.

Пример 7. Дано: $R = 0{,}75$, $p = 4$, $n = 16$, определить существенность связи.

Решение. Вычислим критерий F по формуле (6.27):

$$F = 0{,}5625 \cdot (16 - 4 - 1)/4\,(1 - 0{,}5625) = 3{,}53.$$

$F_{\text{табл.}} = 3{,}36$ при $v_1 = 4$, $v_2 = 16 - 4 - 1 = 11$ и уровне значимости 0,95.

Ответ. Расчетное значение F-критерия превышает табличное, поэтому можно сделать вывод о существенности связи.

Если факторы-аргументы не являются случайными величинами, то коэффициенты корреляции не могут быть использованы при построении уравнения регрессии, так как не могут быть интерпретированы как показатели тесноты связи.

Существенность вводимых факторов в случае линейной множественной регрессии может быть проверена одновременно с существенностью коэффициентов регрессии.

Для проверки существенности вычисляется отношение

$$t_i = a_i / \sigma_i \; i = 1, n, \qquad (6.28)$$

где a_i — коэффициент множественной регрессии;

σ_i — среднее квадратическое отклонение этого коэффициента.

Если $t_i < t_{\text{табл.}}$, взятого по таблицам t-распределения Стьюдента, то с заданной вероятностью не отвергается гипотеза, что соответствующий коэффициент регрессии a_i в генеральной совокупности (который неизвестен и который нужно оценить по данным выборки) равняется нулю. При этом i-й фактор в таком случае признается несущественным для построенного уравнения регрессии.

При проведении исследования может оказаться, что вычисленные значения t для нескольких факторов не превышают $t_{\text{табл.}}$. В этом случае несущественные факторы из уравнения регрессии исключаются поочередно, начиная с наименьшего по абсолютной величине t. Фактор, соответствующий минимальному значению t, из уравнения регрессии исключается, и заново решается система нормальных уравнений. Затем вновь вычисляются значения t для всех оставшихся в уравнении коэффициентов, определяется минимальное значение t, которое сопоставляется с $t_{\text{табл.}}$. Если окажется, что $t_{\min} < t_{\text{табл}}$, то фактор, имеющий $t_{\min}$, исключается.

Процесс исключения коэффициентов повторяется до тех пор, пока не будет выполняться соотношение $t_{\min} \geq t_{\text{табл}}$. В этом случае все оставшиеся в уравнении факторы существенны.

Проводить исключение из уравнения регрессии одновременно нескольких факторов, имеющих $t < t_{\text{табл}}$, нецелесообразно, так как после исключения одного несущественного фактора меняются коэффициенты регрессии других факторов, значения t, и несущественные факторы после пересчета могут оказаться существенными.

Аналогичный подход осуществляется и при наличии корреляционной зависимости, но на последней стадии отбора существенных факторов. Проверка значимости уравнения регрессии осуществляется по критерию Фишера:

$$F = \sigma_y^2 / \sigma_{\text{о-т.}}^2 \qquad (6.29)$$

с числом степеней свободы $v_1 = n - 1$ и $v_2 = n - p - 1$,

где

$$\sigma_y^2 = \sum (y_i - y)^2 / (n - 1), \qquad (6.30)$$

$$\sigma_{\text{ост}}^2 = \sum (y_i - y_i)^2 / (n - p - 1) \qquad (6.31)$$

y_i — значения y, полученные по данным наблюдений;

y_i — расчетные значения y, полученные для соответствующих значений $x_1, x_2, ..., x_p$.

Полученное значение F сравнивается с табличным $F_{\text{табл.}}$ при выбранном уровне значимости. Если окажется $F > F_{\text{табл.}}$, то гипотеза о том, что $x_1, x_2, ..., x_p$ не имеют существенного влияния на y, отвергается.

Если $F > F_{\text{табл.}}$, то следует ввести некоторые другие факторы, влияющие на показатель y, или перейти к построению нелинейной множественной регрессии.

При построении регрессионного уравнения весьма существенную информацию о модели может дать рассмотрение остатков e.

Обычно точное распределение остатков e неизвестно, можно оценить эту величину по отклонениям фактических значений y_i от расчетных y_i:

$$y_1 - y_1 = e_1,\ y_2 - y_2 = e_2,\ ...,\ y_n - y_n = e_n.$$

При построении регрессионного уравнения следует проверять автокорреляцию отклонений. Под *автокорреляцией* последовательности значений какого-либо фактора понимается корреляция между членами этой последовательности, передвинутой на несколько единиц. Например, корреляция между рядами

$$e_1, e_2, ..., e_n \text{ и } e_{L+1}, e_{L+2}, ..., e_{L+n},$$

где L — положительное число, которое называют *лагом.* В экономике часто исследуется случай, когда $L = 1$, т. е. рассматривается корреляция между рядами

$$e_1, e_2, ..., e_n \text{ и } e_2, e_3, ..., e_{n+1}.$$

Автокорреляция обычно вычисляется на основе некоторого объема исходных данных n, в которых наблюдения $(n + 1)$, $(n + 2)$, ..., $(n + L)$

отсутствуют и их заменяют первыми результатами наблюдений, т. е. за последним членом x_n снова следуют члены x_1, x_2, ...

Например, для лага $L = 1$ циклическим коэффициентом автокорреляции будет коэффициент корреляции между рядами:

$$x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n \text{ и } x_2, x_3, ..., x_n, x_1.$$

Наиболее распространенным методом проверки наличия автокорреляции рядов является критерий Дарбина–Уотсона.

Для проверки автокорреляции вычисляют величину

$$d = \sum (e_t - e_{t-1})^2 \Big/ \sum e_t^2. \tag{6.32}$$

Расчетное значение d сравнивается с табличным. Таблица значений критерия с уровнем значимости $\alpha = 0{,}05$ дана в Приложениях. В таблице указаны два значения критерия — d_1 и d_2, а также v и n, причем d_1, d_2 соответственно — нижняя и верхняя границы теоретических значений, v — число факторов в модели, n — число уровней временного ряда. При сравнении расчетного значения с табличным возможны случаи:

- если $d < d_1$, то можно сделать вывод о наличии автокорреляции;
- если $d > d_2$, то можно сделать вывод об отсутствии автокорреляции,
- если $d_1 \leq d \leq d_2$, то необходимо дальнейшие исследование автокорреляции.

В таблицах даны критические значения d_1, d_2, для 1%, 2,5% и 5% уровня значимости.

Чтобы проверить значимость отрицательной автокорреляции, нужно вычислить величину $4 - d$. Затем проверка осуществляется аналогично тому, как и в случае положительной автокорреляции.

6.4.2. Стандартизированное уравнение линейной множественной регрессии

Если коэффициенты линейной множественной регрессии рассматривать в качестве показателей влияния факторов, то следует иметь в виду, что коэффициенты регрессии между собой прямо не сравнимы. Их численные значения зависят от выбранных единиц измерения каждого фактора. Чтобы коэффициенты регрессии стали сравнимы, приведем коэффициенты регрессии к *стандартизованному масштабу*.

Для этого все переменные выражают в безразмерных, так называемых стандартизованных единицах измерения при помощи следующих соотношений:

$$t_y = (y - y)/\sigma_y\,;$$
$$t_{x_i} = (x_i - x_i)/\sigma_{x_i}\,, \qquad (6.33)$$

где y и x_i — значения соответствующих факторов в исходном (натуральном) масштабе;

y и x_i — среднее значение факторов y и x_i;

t_y и t_{x_i} — соответствующее значение фактора в стандартизованном масштабе.

Свободный член a_0 в *стандартизованном* уравнении линейной множественной регрессии отсутствует, т. е. уравнение (6.22) можно записать в виде:

$$t_y = \beta_1 t_{x_1} + \beta_2 t_{x_2} + \ldots + \beta_p t_{x_p}. \qquad (6.34)$$

Все переменные уравнения выражены в сравнимых единицах измерения. Коэффициенты β_1, β_2, ..., β_p называются *коэффициентами регрессии в стандартизованном масштабе*. Для их определения необязательно решать снова систему нормальных уравнений. Переход от коэффициентов a_i к β_i ($i = 1, n$) и обратно может осуществляться по формуле

$$\beta_i = a_i \sigma_{x_i}/\sigma_y\,, \qquad (6.35)$$

где σ_{x_i}, σ_y — соответственно средние квадратические отклонения.

Пример 8. Дано регрессионное уравнение $y = 2 + 4x_1 + 6x_2 + 14x_3$, $\sigma_{x_1} = 4$, $\sigma_{x_2} = 2$, $\sigma_{x_3} = 6$, $\sigma_y = 4$. Записать его в стандартизованном масштабе. Сравнить влияние рассматриваемых факторов на фактор y.

Решение. Вычислим коэффициенты регрессии уравнения в стандартизованном масштабе по формуле (6.35)

$$\beta_1 = a_1/\sigma_y = 4 \cdot 4/4 = 4,$$
$$\beta_2 = a_2\sigma_{x_2}/\sigma_y = 6 \cdot 2/4 = 3,$$
$$\beta_3 = a_3\sigma_{x_3}/\sigma_y = 14 \cdot 6/4 = 21.$$

Таким образом, уравнение в стандартизованном масштабе имеет вид:

$$t_y = 4t_{x_1} + 3t_{x_2} + 21t_{x_3}.$$

Коэффициенты регрессии 4, 3, 21 показывают влияния изменения каждой переменной на изменение фактора y. Все коэффициенты выражены в сравнимых единицах измерения. Чем больше $|\beta_i|$, тем сильнее влияет соответствующий факторный показатель на результативный. Таким образом, наибольшее влияние на y имеет фактор x_3, факторы x_1 и x_2 оказывают примерно одинаковое влияние.

На практике часто используют уравнение регрессии в стандартизованном масштабе в виде

$$Y = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + ... + \beta_p x_p + \beta_{p+1} t, \tag{6.36}$$

где Y, x_i — факторы y и x_i в стандартизованном масштабе.

Пример 9. Имеются данные по комплектующим материалам, трудовым ресурсам и средствам производства фирмы, необходимым для изготовления изделия.

После всестороннего качественного анализа имеющейся исходной информации и матрицы парных коэффициентов корреляции были отобраны следующие факторы, которые необходимо включить в уравнение регрессии:

y — реализация изделия, ден. ед.;

x_1 — расход комплектующих материалов, ед.;

x_2 — производственные издержки, ден. ед.;

x_2 — материальные оборотные средства, ден. ед.;

x_3 — фондовооруженность труда, ден. ед.

Введем в уравнение фактор времени, при этом уменьшим возможность автокорреляции.

По уравнению регрессии проверить значимость модели.

Решение. Решая задачу с использованием компьютерных программ, получим уравнение регрессии вида:

$$Y = 70{,}6 + 1{,}19x_1 - 0{,}89x_2 + 1{,}43x_3 + 0{,}18x_4 - 2{,}77t. \tag{6.37}$$

Проверим значимость найденной модели. Выдвигаем гипотезу H_0: модель незначима. Конкурирующая гипотеза H_1: модель значима. Проверим гипотезу с помощью случайной величины.

Случайная величина F имеет распределение Фишера–Снедекора с $\kappa_1 = n - 1$ и $\kappa_2 = n - p - 1$ степенями свободы. Расчетное значение случайной величины $F_{расч.} = 40{,}64$, критическое — $F_{кр.}(\alpha,\ \kappa_1,\ \kappa_2) = F_{кр.}$ (0,01; 12; 8) = 5,67 (найдено по таблице критических точек распределения Фишера–Снедекора при заданном уровне значимости $\alpha = 0{,}01$, $\kappa_1 = 12$, $\kappa_2 = 8$).

$F_{расч.} > F_{кр}$, следовательно нулевая гипотеза отвергается, справедлива конкурирующая.

При 1% уровне значимости найденная модель значима.

Дадим экономическую интерпретацию коэффициентов регрессии. Коэффициент $a_1 = 1{,}19$ показывает, что с увеличением на 1 единицу расхода комплектующих материалов реализация изделия увеличится в среднем на 1,19 ден. ед. Коэффициент $a_2 = -0{,}89$ показывает, что с увеличением производственных издержек на 1 ден. ед. реализация изделия снижается в среднем на 0,89 ден. ед. Аналогично экономически интерпретируются другие коэффициенты.

Многофакторная регрессионная модель в стандартизованном масштабе имеет вид:

$$Y = 0{,}135x_1 - 1{,}276x_2 + 2{,}134x_3 + 0{,}139x_4 - 0{,}693t.$$

Сравнивая коэффициенты по абсолютной величине, следует отметить, что наибольшее влияние на результативный показатель (реализация изделия) оказывают материальные оборотные средства (x_3), затем производственные издержки (x_2), приблизительно одинаковое влияние оказывают такие факторы, как расход комплектующих материалов (x_1) и фондовооруженность (x_4).

При экономическом анализе результатов решения задачи необходимо проанализировать совокупный коэффициент корреляции, составляющий высокую величину, равную 0,981.

Проверим значимость коэффициентов корреляции. Выдвигаем нулевую гипотезу H_0: $R_{ген.} = 0$, конкурирующая гипотеза $R_{ген.} = 0$.

Проверим гипотезу с помощью случайной величины

$$t = [R_B\sqrt{n-p-1}] \Big/ \sqrt{1-R_B^2}\,, \qquad (6.38)$$

которая имеет распределение Стьюдента с $\kappa = n - p - 1$ степенями свободы.

$$t_{расч.} = 14{,}2;\ t\,(\alpha,\ \kappa) = t_{кр}\,(0{,}01;\ 8) = 3{,}36.$$

Так как $t_{расч.} > t_{кр}$, то нулевая гипотеза отвергается, справедлива конкурирующая гипотеза.

В связи с тем, что коэффициент корреляции близок к единице, связь между рассматриваемыми показателями тесная. Чтобы дать количественную оценку тесноты взаимосвязи, найдем коэффициент детерминации $R^2 \cdot 100\% = 96{,}2\%$, который показывает, на сколько процентов в среднем вариация результативного показателя объясняется за счет вариации всех факторных признаков, включенных в модель. Таким образом, колебания реализации изделия в среднем на 96,2% объясняются за счет совокупного влияния факторов, включенных в модель.

Глава 7

Временные ряды

Каким бы видом производства или бизнеса ни занималась фирма, ей приходится планировать предпринимательскую деятельность на будущий период. При разработке краткосрочных и долгосрочных планов менеджеры вынуждены прогнозировать будущие значения таких важнейших показателей, как, например, объем продаж, издержки производства, ставки процента и т. д. Широкому внедрению методов прогнозирования способствовало развитие персональных компьютеров и статистических программных пакетов.

Под *прогнозом* понимается научно обоснованное описание возможных состояний систем в будущем и сроков достижения этого состояния, а процесс разработки прогнозов называют *прогнозированием.*

В зависимости от объектов прогнозирования прогнозы разделяют на научно-технические, экономические, социальные и т. д.

В зависимости от масштабности объекта прогнозирования экономические прогнозы охватывать все уровни: от прогнозов отдельных предприятий, производств (микроуровни), до развития отрасли в масштабе страны (макроуровня) или закономерностей мирового масштаба (глобального уровня).

Временем упреждения при прогнозировании называют отрезок времени от момента, для которого имеются последние данные об изучаемом объекте, до момента, к которому относится прогноз.

По длительности времени упреждения различают следующие виды прогнозов:

- *оперативные* с периодом упреждения до одного месяца;
- *краткосрочные* до одного года;
- *среднесрочные* от одного года до пяти лет;
- *долгосрочные* с периодом упреждения более пяти лет.

Наибольший практический интерес представляют оперативные и краткосрочные прогнозы.

Прогнозирование экономических процессов состоит из следующих этапов:

- постановка задачи и сбор необходимой информации для прогнозирования;
- первичная обработка исходной информации;
- определение возможных моделей прогнозирования;
- оценка параметров рассматриваемых моделей;
- проверка адекватности выбранных моделей;
- расчет характеристик моделей.

7.1. Виды временных рядов

7.1.1. Основные понятия и определения

Происходящие в экономических системах процессы в основном проявляются как ряд расположенных в хронологическом порядке значений определенного показателя, который в своих изменениях отражает развитие изучаемого явления.

Ряд наблюдений за значениями определенного показателя, упорядоченный в зависимости от возрастающих или убывающих значений другого показателя, называют *динамическим рядом*, *временным рядом*, *рядом динамики*. Отдельные наблюдения временного ряда называются *уровнями* этого ряда.

Временные ряды бывают моментные, интервальные и производные. *Моментные ряды* характеризуют значения показателя на определенные моменты времени. Пример такого ряда представлен в табл. 7.1.

Таблица 7.1. Численность работников фирмы

Дата	1.01	1.02	1.03	1.04	1.05	1.06
Численность работников, чел.	283	287	295	298	308	312

Интервальные ряды характеризуют значения показателя за определенные интервалы времени (табл. 7.2).

Таблица 7.2. Фонд заработной платы работников фирмы

Месяц	Январь	Февраль	Март	Апрель	Май	Июнь
Фонд заработной платы, ден. ед.	1520	1590	1650	1710	1780	1890

Производные ряды получаются из средних или относительных величин показателя (табл. 7.3).

Таблица 7.3. Среднемесячная заработная плата работников фирмы

Месяц	Январь	Февраль	Март	Апрель	Май	Июнь
Средняя заработная плата, ден. ед.	5400	5440	5430	5470	5475	5500

Уровни ряда могут иметь детерминированные или случайные значения. Ряд последовательных данных о количестве дней в месяце, квартале, годе являются примерами рядов с детерминированными значениями.

Прогнозированию подвергаются ряды со случайными значениями уровней. Каждый показатель таких рядов может иметь дискретную или непрерывную величину.

7.2. Требования к исходной информации

Важное значение для прогнозирования имеет выбор интервалов между соседними уровнями ряда. При слишком большом интервале времени могут быть упущены некоторые закономерности в динамике показателя. При слишком малом — увеличивается объем вычислений, могут появляться ненужные детали в динамике процесса.

Поэтому выбор интервала времени между уровнями ряда должен решаться конкретно для каждого процесса, причем удобнее иметь равноотстоящие друг от друга уровни.

Важным условием правильного отражения временным рядом реального процесса развития является *сопоставимость уровней ряда*. Несопоставимость чаще всего встречается в стоимостных характеристиках, изменениях цен, территориальных изменениях, при укрупнении предприятий и др. Для несопоставимых величин показателя неправомерно проводить прогнозирование.

Для успешного изучения динамики процесса необходимо, чтобы информация была полной, временной ряд имел достаточную длину, отсутствовали пропущенные наблюдения.

Уровни временных рядов могу иметь аномальные значения. Появление таких значений может быть вызвано ошибками при сборе, записи или передаче информации. Это ошибки технического порядка или ошибки первого рода. Однако аномальные значения могут отражать реальные процессы, например, скачок курса доллара и др. Такие аномальные значения относят к ошибкам второго рода, они устранению не подлежат.

Для выявления аномальных уровней временных рядов можно использовать метод Ирвина.

Метод предполагает использование следующей формулы:

$$\lambda_t = \left| y_t - y_{t-1} \right| / \sigma_y, \; t = 1, n,$$

где σ_y — среднеквадратическое отклонение временного ряда y_1, y_2, ..., y_t, ..., y_n.

$$\sigma_y = \sqrt{[\Sigma (y_t - y)^2]/(n-1)},$$

$$\bar{y} = \sum y_t / n.$$

Расчетные значения λ_2, λ_3, ... сравниваются с табличными значениями критерия Ирвина λ_α, и если оказываются больше табличных, то соответствующее значение y_t уровня ряда считается аномальным.

Значения критерия Ирвина для уровня значимости α = 0,05 приведены в табл. 7.4.

Таблица 7.4

n	2	3	10	20	30	50	100
λ_α	2,8	2,3	1,5	1,3	1,2	1,1	1,0

После выявления аномальных уровней необходимо определение причин их возникновения. Если они вызваны ошибками технического порядка, то устраняются или заменой аномальных уровней соответствующими значениями по кривой, аппроксимирующей временной ряд, или заменой уровней средней арифметической двух соседних уровней ряда.

Ошибки, возникающие из-за воздействия факторов, имеющих объективный характер, устранению не подлежат.

Пример 1. Временной ряд задан в табличной форме. Проверить наличие аномальных значений.

t	y_t	$y_t - y$	$(y_t - y)^2$
1	1,6	–1,31	1,72
2	1,9	–1,01	1,02
3	2,1	–0,81	0,66
4	2,4	–0,51	0,26
5	4,5	1,59	2,53
6	2,8	–0,11	0,01
7	3,1	0,19	0,04
8	3,3	0,39	0,15
9	3,6	0,69	0,48
10	3,8	0,89	0,79
Σ	29,1		7,66

Решение. Вычисленные значения заносим в таблицу.

$$\bar{y}_t = \sum y_t / n = 29{,}1/10 = 2{,}91,$$

$$\sigma_y = \sqrt{[\Sigma (y_t - y)^2]/(n-1)} = \sqrt{7{,}66/9} = 0{,}92.$$

Исследуем на аномальные значения точки $t = 2$ и $t = 5$.

$$\lambda_2 = |y_2 - y_1| / \sigma_y = (1{,}9 - 1{,}6)/0{,}92 = 0{,}32.$$

Так как $\lambda_2 = 0{,}32$, $\lambda_{\text{табл.}} = 1{,}5$ (для $n = 10$) и $0{,}32 < 1{,}5$, следовательно уровень $t = 2$ — нормальный.

$$\lambda_5 = |y_5 - y_4| / \sigma_y = (4{,}5 - 2{,}4)/0{,}92 = 2{,}28.$$

Так как $\lambda_5 = 2{,}28$, $\lambda_{\text{табл.}} = 1{,}5$ (для $n = 10$) и $2{,}28 > 1{,}5$, то уровень $t = 5$ – аномальный. Если уровень $t = 5$ относится к ошибкам 1 рода, то его можно заменить на $y_5 = (2{,}4 + 4{,}5)/2 = 3{,}45$.

Ответ. Заданные уровни временного ряда являются нормальными, за исключением уровня $t = 5$.

7.3. Компоненты временных рядов

Если во временном ряду проявляется длительная тенденция изменения экономического показателя, то в этом случае говорят, что имеет место тренд.

Пусть дан временной ряд

$$y_t = y_1, y_2, ..., y_t, ..., y_n, t = 1, n.$$

Считают, что значения уровней временных рядов экономических показателей складываются из следующих составляющих (компонент): тренда, сезонной, циклической и случайной.

Под *трендом* понимают изменение, определяющее общее направление развития или основную тенденцию временного ряда. Тренд относят к систематической составляющей долговременного действия. Во временных рядах часто происходят регулярные колебания, которые относятся к периодическим составляющим рядов экономических процессов.

Если период колебаний не превышает 1 года, то их называют *сезонными*, более 1 года — *циклическими составляющими*. Чаще всего причиной сезонных колебаний являются природные, климатические условия, циклических — демографические циклы др.

Тренд, сезонная и циклическая составляющая называются *регулярными*, или *систематическими компонентами временного ряда*. Если из временного ряда удалить регулярную компоненту, то останется *случайная компонента*.

Если временной ряд представлен в виде суммы составляющих компонент, то модель называется *аддитивной*, если в виде произведения, то *мультипликативной* или *смешанного* типа.

$$y_t = u_t + s_t + v_t + e_t \text{ — аддитивная форма,}$$

$$y_t = u_t\, s_t\, v_t\, e_t \text{ — мультипликативная форма,}$$

$$y_t = u_t\, s_t\, v_t + e_t \text{ — смешанная форма,}$$

где y_t — уровни временного ряда;

u_t — временной тренд;

s_t — сезонная компонента;

v_t — циклическая составляющая;

e_t — случайная компонента.

7.4. Проверка гипотезы существования тенденции

Прогнозирование временных рядов целесообразно начинать с построения графика исследуемого показателя. Однако в нем не всегда прослеживается присутствие тренда. Поэтому в этих случаях необходимо выяснить, существует ли тенденция во временном ряду или она отсутствует.

Дан временной ряд:

$$y_1, y_2, ..., y_{t,} ..., y_n,$$

где $t = 1, n$.

Рассмотрим *критерий «восходящих и нисходящих» серий*, согласно которому тенденция определяется по следующему алгоритму.

1. Для исследуемого временного ряда определяется последовательность знаков, исходя из условий

   $$+, \text{ если } y_{t+1} - y_t > 0,$$

   $$-, \text{ если } y_{t+1} - y_t < 0.$$

   При этом, если последующее наблюдение равно предыдущему, то учитывается только одно наблюдение.
2. Подсчитывается число серий $v(n)$. Под серией понимается последовательность подряд расположенных плюсов или минусов, причем один плюс или один минус считается серией.
3. Определяется протяженность самой длинной серии $l_{\max}(n)$.
4. По табл. 7.5 находится значение $l(n)$.

Таблица 7.5

Длина ряда (n)	$n \le 26$	$26 < n \le 153$	$153 < n \le 170$
Значение $l(n)$	5	6	7

5. Если нарушается хотя бы одно из следующих неравенств, то гипотеза об отсутствии тренда отвергается с доверительной вероятностью 0,95.

   $$v(n) > [(2n-1)/3 - 1{,}96\sqrt{(16n-29)/90}],$$

   $$l_{\max}(n) \le l(n).$$

Квадратные скобки неравенства означают целую часть числа. Под целой частью числа понимают целое число, не превосходящее само это число. Например, [2, 4] = 2.

Пример 2. Дана динамика ежеквартального выпуска продукции фирмы (табл. 7.6) в ден. ед. С помощью критерия «восходящих и нисходящих» серий сделать вывод о присутствии или отсутствии тренда. Доверительную вероятность принять равной 0,95.

Таблица 7.6

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Y_t	10	14	7	16	15	17	16	20	17	7	15	16	20	14	19	21

Решение. Определим последовательность знаков.

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
y_t	10	14	7	16	15	17	16	20	17	7	15	16	20	14	19	21
δ_i		+	–	+	–	+	–	+	–	–	+	+	+	–	+	+

Число серий $v(n) = 11$, протяженность самой длинной серии $l_{\max}(n) =$ $= 3$, по таблице $l(n) = 5$. Запишем систему неравенств:

$$11 > [(2 \cdot 16 - 1)/3 - 1{,}96\sqrt{(16 \cdot 6 - 29)/90}],$$

$$3 \leq 5$$

или

$$11 > 7,$$

$$3 \leq 5.$$

Ответ. Оба неравенства выполняются, поэтому тренд в динамике выпуска продукции фирмы отсутствует с доверительной вероятностью 0,95.

Глава 8

Показатели динамики экономических процессов

8.1. Основные показатели динамики

Для количественной оценки динамики экономических процессов применяют такие статистические показатели, как *абсолютные приросты*, *темпы роста* и *прироста*. Они подразделяются на цепные, базисные и средние.

Если сравнение уровней временного ряда осуществляется с одним и тем же уровнем, принятым за базу, то показатели называются *базисными*. Если сравнение осуществляется с переменной базой, и каждый последующий уровень сравнивается с предыдущим, то вычисленные показатели называются *цепными*.

Формулы для вычисления цепных, базисных и средних абсолютных приростов, темпов роста и темпов прироста даны в табл. 8.1. В формулах приняты обозначения: $y_1, y_2, ..., y_t, ..., y_n$ — уровни временного ряда; n — длина ряда; $y_б$ — уровень временного ряда, принятый за базу сравнения.

Таблица 8.1

Обозначения	Абсолютный прирост	Темп роста	Темп прироста
Цепной	$\Delta y_t = y_t - y_{t-1}$	$T_t = y_t/y_{t-1} \cdot 100\%$	$K_t = T_t - 100\%$
Базисный	$\Delta y_{бt} = y_t - y_б$	$T_{бt} = y_t/y_б \cdot 100\%$	$K_{бt} = T_t - 100\%$
Средний	$\Delta y_t = (y_n - y_1)/(n-1)$	$T = (y_n/y_1)^{1/(n-1)} \cdot 100\%$	$K = T - 100\%$

Описание динамики ряда средним приростом соответствует его представлению в виде прямой, проходящей через две крайние точки. Для получения прогнозного значения на один шаг вперед достаточно к последнему наблюдению добавить значение среднего абсолютного прироста:

$$y_{n+1} = y_n + \Delta y, \tag{8.1}$$

где y_n — значение показателя в n точке временного ряда;

y_{n+1} — прогнозное значение показателя в точке $n + 1$;

Δy — значение среднего прироста временного ряда.

Получение прогнозного значения по формуле (8.1) корректно, если динамика ряда близка к линейной. На такой равномерный характер развития динамики указывают примерно одинаковые цепные абсолютные приросты.

Использование среднего темпа роста (среднего темпа прироста) для описания динамики развития ряда соответствует его представлению в виде показательной или экспоненциальной кривой, проведенной через две крайние точки, и характерно для процессов, изменение динамики которых происходит с постоянным темпом роста. Прогнозное значение на i шагов вперед определяется по формуле

$$y_{n+i} = y_n \cdot \bar{T}^{\,i}, \tag{8.2}$$

где y_{n+i} — прогнозная оценка значения показателя в точке $n + i$;

$\bar{T}$ — средний темп роста, выраженный не в %.

Недостатком прогнозирования с использованием среднего прироста и среднего темпа роста является то, что они учитывают начальный и конечный уровни ряда, исключая влияния промежуточных уровней. Тем не менее они используются как простейшие, приближенные способы прогнозирования.

Пример 1. Ежеквартальная динамика фонда заработной платы работников фирмы в ден. ед. представлена в табл. 8.2.

Таблица 8.2

t	1	2	3	4	5
y_t	252	253	254,2	255,3	256,5

Обосновать правомерность использования среднего прироста для определения прогнозного значения фонда заработной платы в 6-м квартале.

Решение. Найдем цепные абсолютные приросты:

$$\Delta y_2 = y_2 - y_1 = 253 - 252 = 1,$$

$$\Delta y_3 = y_3 - y_2 = 254{,}2 - 253 = 1{,}2,$$

$$\Delta y_4 = y_4 - y_3 = 255{,}3 - 254{,}2 = 1{,}1,$$

$$\Delta y_5 = y_5 - y_4 = 256{,}5 - 255{,}3 = 1{,}2.$$

Цепные абсолютные приросты изменяются от 1 до 1,2; их изменения примерно одинаковы, что свидетельствует о близости ежеквартальной динамики фонда заработной платы фирмы к линейной. Поэтому правомерно определить прогнозное значение y'_6 с помощью среднего прироста Δy:

$$\Delta y = (y_5 - y_1)/(n - 1) = (256{,}5 - 252)/(5 - 1) = 1{,}125,$$

$$y'_6 = y_5 + \Delta y = 256{,}5 + 1{,}125 = 257{,}625.$$

Пример 2. Изменение ежеквартальной динамики фонда заработной платы работников фирмы происходило примерно с постоянным темпом роста в течение пяти кварталов. Фонд заработной платы в 1-м квартале составлял 252 ден. ед., а в 5-м квартале — 256,5 ден. ед.

Определить прогноз фонда заработной платы работников фирмы в 6-м квартале, используя средний темп роста.

Решение. По условию изменение фонда заработной платы происходило примерно с постоянным темпом роста в течение пяти кварталов. Поэтому правомерно использовать средний темп роста для расчета прогноза фонда в 6-м квартале.

Средний темп роста составит:

$$T = (y_n/y_1)^{1/(n-1)} \cdot 100\%,$$

$$T = (y_5/y_1)^{1/4} \cdot 100\% = (256{,}5/252)^{1/4} \cdot 100\% = 100{,}44\%.$$

Таким образом, прогноз фонда заработной платы сотрудников фирмы составит:

$$y'_6 = y_5 \cdot T = 256{,}5 \cdot 1{,}0044 = 257{,}6 \text{ ден. ед.}$$

Ответ. Прогноз фонда заработной платы сотрудников фирмы составляет 257,6 ден. ед.

8.2. Сглаживание временных рядов с помощью скользящей средней

8.2.1. Основные понятия

Предварительный анализ временных рядов экономических показателей заключается в выявлении аномальных значений уровней ряда, которые не соответствуют возможностям рассматриваемой экономической системы, а также в определении наличия тренда.

Наиболее распространенным приемом для устранения аномальных значений показателей и отсутствия тенденции временного ряда является *сглаживание временного ряда*. При этом производится замена фактических уровней временного ряда расчетными, что способствует более четкому проявлению тенденции.

Скользящие средние позволяют сгладить случайные и периодические колебания временного ряда.

8.2.2. Сглаживание по простой скользящей средней

Наиболее распространенной процедурой сглаживания является метод *простой скользящей средней*. Сначала для временного ряда определяется интервал сглаживания (g). Если необходимо сгладить мелкие колебания, то интервал сглаживания берут по возможности большим, если нужно сохранить более мелкие колебания, то интервал сглаживания уменьшают. Для первых уровней временного ряда вычисляется их среднее арифметическое значение. Это будет сглаженное значение уровня ряда, находящегося в середине интервала сглаживания. Затем интервал сглаживания сдвигается на один уровень вправо, повторяется вычисление средней арифметической и т. д. В результате такой процедуры получим ряд сглаженных значений, при этом в зависимости от (g) первые и последние уровни теряются.

Удобно длину интервала сглаживания (g) брать в виде нечетного числа, в этом случае расчетное значение скользящей средней будет приходиться на средний интервал ряда.

Например, для интервала $g=3$ сглаженные уровни рассчитываются по формуле

$$\bar{y}_t = (y_{t-1} + y_t + y_{t+1})/3,$$

чтобы не потерять первый и последний уровни ряда, их можно вычислить по формулам

$$\overline{y}_1 = (5y_1 + 2y_2 - y_3)/6,$$

$$\overline{y}_n = (-y_{n-2} + 2y_{n-1} + 5y_n)/6.$$

Метод простой скользящей средней дает хорошие результаты в динамических рядах с линейной тенденцией развития.

8.2.3. Сглаживание по взвешенной скользящей средней

Для рядов с нелинейной тенденцией развития необходимо применять метод *взвешенной скользящей средней*. Метод отличается от метода простой скользящей средней тем, что уровни, входящие в интервал сглаживания, суммируются с разными весами. Для полиномов 2-го и 3-го порядков по 5-членной взвешенной скользящей средней центральное значение интервала определяется по формуле:

$$\overline{y}_t = (-3y_{t-2} + 12y_{t-1} + 17y_t + 12y_{t+1} - 3y_{t+2})/35. \qquad (8.3)$$

Весовые коэффициенты при сглаживании по полиномам 2-го и 3-го порядка в зависимости от длины интервала сглаживания представлены в табл. 8.3.

Таблица 8.3

Длина интервала сглаживания	Весовые коэффициенты
5	(–3, +12, +17)/35
7	(–2, +3, +6, +7)/21
9	(–21, +14, +39, +54, +59)/231

Пример 3. По данным динамики урожайности за 10 лет (табл. 8.4) рассчитать:

3-, 5-летние скользящие средние простые;

5-летние скользящие средние взвешенные;

сравнить результаты расчетов.

Таблица 8.4

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_t	16,3	21,2	18,1	8,7	16,3	17,3	20,9	15,4	19,7	21,7

Решение. Вычислим 3-летние скользящие средние простые:

$$y_2 = (16{,}3 + 21{,}2 + 18{,}1)/3 = 18{,}5,$$

$$y_3 = (21{,}2 + 18{,}1 + 8{,}7)/3 = 16{,}0 \text{ и т. д.}$$

Найдем 5-летние скользящие средние простые:

$$y_3 = (16{,}3 + 21{,}2 + 18{,}1 + 8{,}7 + 16{,}3)/5 = 16{,}1,$$

$$y_4 = (21{,}2 + 18{,}1 + 8{,}7 + 16{,}3 + 17{,}3)/5 = 16{,}3 \text{ и т. д.}$$

Определим 5-летние скользящие средние взвешенные:

$$y_3 = (-3 \cdot 16{,}3 + 12 \cdot 21{,}2 + 17 \cdot 18{,}1 + 12 \cdot 8{,}7 - 3 \cdot 16{,}3)/35 = 16{,}2,$$

$$y_4 = (-3 \cdot 21{,}2 + 12 \cdot 18{,}1 + 17 \cdot 8{,}7 + 12 \cdot 16{,}3 - 3 \cdot 17{,}3)/35 = 12{,}7 \text{ и т. д.}$$

Вычисленные значения занесем в табл. 8.5.

Таблица 8.5

t	y_t	3-летняя скользящая простая	5-летняя скользящая простая	5-летняя скользящая взвешенная
1	16,3	—	—	—
2	21,2	18,5	—	—
3	18,1	16,0	16,1	16,2
4	8,7	14,4	16,3	12,7
5	16,3	14,1	16,3	13,5
6	17,3	18,2	15,7	19,1
7	20,9	17,9	17,9	18,3
8	15,4	18,7	19,0	18,1
9	19,7	18,9	—	—
10	21,7	—	—	—

Сравнивая значения 3- и 5-летних скользящих простых видно, что более гладкой является 5-летняя скользящая (3-я и 4-я колонки).

Сравнивая значения 5-летних скользящих простых и взвешенных видно, что более гладкой является скользящая простая, но скользящая взвешенная более близка к исходной (4-я и 5-я колонки).

8.2.4. Экспоненциальное сглаживание

Выравнивание временных рядов может быть произведено методом *экспоненциального сглаживания*. Суть метода заключается в том, что в процедуре нахождения сглаженного уровня используются значения только предшествующих уровней ряда, взятые с определенным весом, причем вес наблюдения уменьшается по мере удаления его от момента времени, для которого определяется сглаженное значение уровня ряда. Если для исходного временного ряда

$$y_1, y_2, ..., y_n$$

соответствующие сглаженные значения уровней обозначить S_t, где $t = 1, n$, то экспоненциальное сглаживание производится по рекуррентному соотношению:

$$S_t = \alpha\, y_t + (1 - \alpha)\, S_{t-1},$$

где α — параметр сглаживания, $0 < \alpha < 1$, величина $1 - \alpha$ называется коэффициентом дисконтирования.

Используя рекуррентное соотношение для всех уровней ряда, начиная с первого и кончая моментом уровня t, можно получить, что экспоненциальная средняя, т. е. сглаженное данным методом значение уровня ряда, является взвешенной средней всех предшествующих уровней:

$$S_t = \alpha \sum (1 - \alpha)^i\, y_{t-i} + (1 - \alpha)^t\, S_0.$$

Например, $\alpha = 0{,}2$, тогда вес текущего наблюдения y_t равен 0,2. Вес предыдущего уровня y_{t-1} будет соответствовать $\alpha\,(1 - \alpha) = 0{,}2\,(1 - 0{,}2) = 0{,}2 \cdot 0{,}8 = 0{,}16$. Для уровня y_{t-2} вес составит $\alpha\,(1 - \alpha)^2 = 0{,}2 \cdot 0{,}64 = 0{,}128$ и т. д.

Обычно во временных рядах экономических задач величину параметра сглаживания выбирают в интервале от 0,1 до 0,3.

Начальный параметр S_0 принимают равным значению первого уровня ряда y_1 или равным средней арифметической нескольких первых членов ряда, например, y_1, y_2, y_3:

$$S_0 = (y_1 + y_2 + y_3)/3.$$

Указанный порядок выбора величины S_0 обеспечивает хорошее согласование сглаженного и исходного временных рядов для первых уровней. Если же при подходе к правому концу ряда сглаженные значения начинают значительно отличаться от соответствующих значений исходного ряда, то целесообразно перейти на другой параметр сглаживания α.

Пример 4. В табл. 8.6 приведена численность преподавателей высших учебных заведений РФ (тыс. человек) по годам. Произвести сглаживание временного ряда с использованием экспоненциальной средней, приняв параметр сглаживания $\alpha = 0{,}1$ и $\alpha = 0{,}3$. По результатам расчетов определить, какой из сглаженных временных рядов носит более гладкий характер.

Таблица 8.6

Год	1992 г.	1993 г.	1994 г.	1995 г.	1996 г.	1997 г.	1998 г	1999 г.
y_t	233,5	239,9	239,8	261,9	261,8	268,7	260,7	298,6

Решение. Рассмотрим случай $\alpha = 0{,}1$:

$$S_0 = (233{,}5 + 239{,}9 + 239{,}8)/3 = 237{,}7,$$

$$S_1 = \alpha\, y_1 + (1 - \alpha)\, S_0 = 0{,}1 \cdot 233{,}5 + 0{,}9 \cdot 237{,}7 = 237{,}3,$$

$$S_2 = \alpha\, y_2 + (1 - \alpha)\, S_1 = 0{,}1 \cdot 239{,}9 + 0{,}9 \cdot 237{,}3 = 237{,}6,$$

$$S_3 = \alpha y_3 + (1 - \alpha)\, S_2 = 0{,}1 \cdot 239{,}8 + 0{,}9 \cdot 237{,}6 = 237{,}8 \text{ и т. д.}$$

Для случая $\alpha = 0{,}3$:

$$S_1 = \alpha\, y_1 + (1 - \alpha)\, S_0 = 0{,}3 \cdot 233{,}5 + 0{,}7 \cdot 237{,}7 = 233{,}6,$$

$$S_2 = \alpha\, y_2 + (1 - \alpha)\, S_1 = 0{,}3 \cdot 239{,}9 + 0{,}7 \cdot 233{,}6 = 235{,}5,$$

$$S_3 = \alpha\, y_3 + (1 - \alpha)\, S_2 = 0{,}3 \cdot 239{,}8 + 0{,}7 \cdot 235{,}5 = 236{,}8 \text{ и т. д.}$$

Ответ. Из проведенных расчетов можно заключить, что при $\alpha = 0{,}1$ временной ряд имеет более гладкий характер, так как в этом случае в наибольшей степени поглощаются случайные колебания временного ряда.

8.3. Применение моделей кривых роста

Комплекс аналитических методов выравнивания сводится к выбору конкретных кривых роста и определению их параметров. Под *кривой роста* будем понимать некоторую функцию, аппроксимирующую заданный динамический ряд.

Разработка прогноза с использованием кривых роста включает следующие этапы:

- выбор одной или несколько кривых, форма которых соответствует динамике временного ряда;

- оценка параметров выбранных кривых;
- проверка адекватности выбранных кривых прогнозируемому процессу и окончательный выбор кривой;
- расчет точечного и интервального прогнозов.

Кривые роста обычно выбираются из трех классов функций.

К первому классу относятся кривые, которые используются для описания процессов с монотонным характером развития и отсутствием пределов роста.

Ко второму классу относятся кривые, имеющие предел роста в исследуемом периоде. Такие кривые называют *кривыми насыщения*.

Если кривые насыщения имеют точки перегиба, то они относятся к кривым третьего класса, их называют S-образными кривыми.

Среди кривых роста первого типа следует выделить класс полиномов:

$$y_t = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + ...$$

Параметр a_0 является начальным уровнем ряда при $t = 0$, a_1 называют линейным приростом, a_2 — ускорением роста, a_3 — изменением ускорения роста.

В экономических исследованиях в большинстве случаев применяются полиномы не выше третьего порядка.

Полином первой степени

$$y_t = a_0 + a_1 t$$

на графике (рис. 8.1) изображается в виде прямой и используется для описания процессов, развивающихся во времени равномерно.

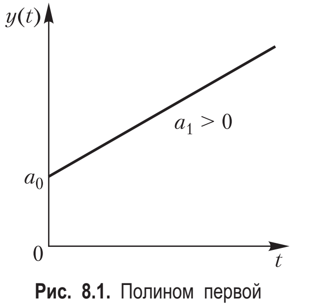


Рис. 8.1. Полином первой степени $y_t = a_0 + a_1 t$

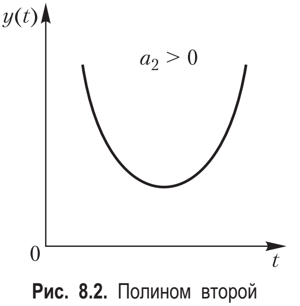


Рис. 8.2. Полином второй степени $y_t = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$

Полином второй степени

$$y_t = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$$

на графике (рис. 8.2) изображается в виде параболы и применяется в тех случаях, когда процесс развивается равноускоренно. Если $a_2 > 0$, то ветви параболы направлены вверх, в случае $a_2 < 0$ — вниз.

Полином третьей степени

$$y_t = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3.$$

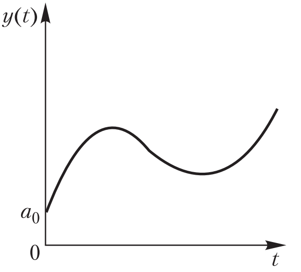


Рис. 8.3. Полином третьей степени $t = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$

У этого полинома (рис. 8.3) знак прироста ординат может изменяться один или два раза.

Оценки параметров полиномов определяются методом наименьших квадратов, согласно которому нормальное уравнение для определения коэффициентов прямой имеет вид:

$$\Sigma y_t = a_0 n + a_1 \Sigma t,$$

$$\Sigma y_t \cdot t = a_0 \Sigma t + a_1 \Sigma t^2.$$

Решение системы, т. е. нахождение коэффициентов системы a_0 и a_1 производится по формулам Крамера.

Систему нормальных уравнений можно упростить и уменьшить абсолютные значения величин, если перенести начала координат в середину ряда динамики. Если до переноса начала координат $t = 1, 2, 3, ...$, то после переноса:

для четного числа членов $t = ..., -5, -3, -1, 1, 3, 5, ...,$

для нечетного числа членов $t = ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...$

В этом случае коэффициенты прямой находятся из выражений:

$$a_0 = \Sigma y_t / n; \ a_1 = \Sigma y_t t / \Sigma t^2. \qquad (8.4)$$

Аналогично определяются коэффициенты полинома второй степени (параболы), которые после переноса начала координат в середину ряда динамики имеют вид:

$$a_0 = \Sigma y_t / n - \Sigma t^2 / n \{(n \Sigma y_t t^2 - \Sigma t^2 \Sigma y_t) / [n \Sigma t^4 - (\Sigma t^2)^2]\};$$

$$a_1 = \Sigma y_t t / \Sigma t^2; \ a_2 = (n \Sigma y_t t^2 - \Sigma t^2 \Sigma y_t) / [n \Sigma t^4 - (\Sigma t^2)^2]; \qquad (8.5)$$

Показательная кривая (рис. 8.4) имеет вид:

$$y_t = a \cdot b^t.$$

Если $b > 1$, то кривая растет с ростом t, и падает, если $b < 1$.

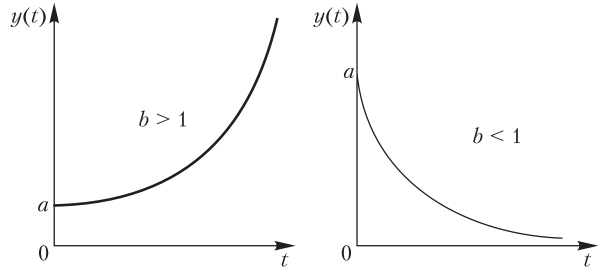


Рис. 8.4. Показательная кривая $y_t = ab^t$

Параметр a характеризует начальные условия, а параметр b — постоянный темп роста.

Прологарифмировав это выражение, получим:

$$\log y_t = \log a + t \log b.$$

Обозначим $A = \log a$, $B = \log b$, тогда $\log y_t = A + tB$. Для оценивания неизвестных параметров можно использовать систему нормальных уравнений для прямой и найти параметры A и B. Зная значения $A = \log a$ и $B = \log b$, с помощью потенцирования определим значения a и b.

Следует иметь в виду, что полученные таким образом оценки параметров показательной кривой оказываются смещенными в связи с тем, что в расчете участвуют не исходные данные, а их логарифмы. Причем смещение будет тем значительнее, чем больше разность между соседними уровнями заданного ряда.

Рассмотренные типы кривых используются для описания монотонно возрастающих или убывающих процессов без насыщения. Примером кривой с насыщением является модифицированная экспонента (рис. 8.5):

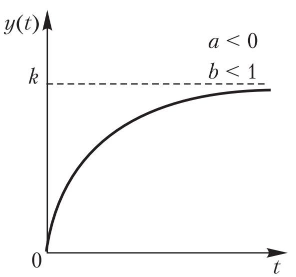


Рис. 8.5. Модифицированная экспонента $y_t = k + ab^t$

$$y_t = k + ab^t,$$

где $y = k$ — горизонтальная асимптота.

Коэффициент k может быть определен исходя из свойств прогнозируемого процесса или задан экспертным путем. В этом случае параметры кривой могут быть определены с помощью метода наименьших квадратов (МНК) после приведения уравнения к линейному виду:

$$y_t - k_1 = a \cdot b^t,$$

где k_1 — заданное значение асимптоты.

Прологарифмируем полученное выражение:

$$\log|y_t - k_1| = \log|a| + t\log b.$$

Используя систему нормальных уравнений, можно найти параметры $\log a$ и $\log b$, потенцируя которые, определим a и b.

Если параметр a отрицателен, то асимптота расположена выше кривой. В экономических процессах чаще всего используется случай, когда $a < 0$, $b < 1$. При этом рост уровней ряда замедляется и стремится к некоторому пределу.

Наиболее известными из S-образных кривых являются кривая Гомперца (рис. 8.6) и логистическая кривая (кривая Перла–Рида) (рис. 8.7).

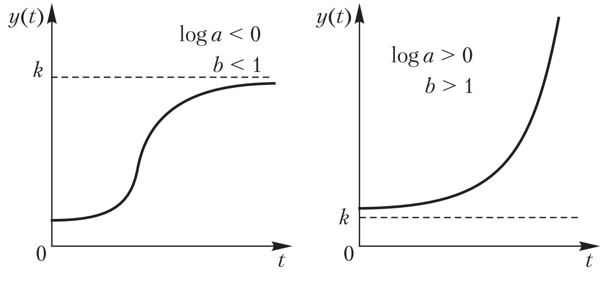


Рис. 8.6. Кривая Гомперца $y_t = ka^{b^t}$

Кривая Гомперца имеет аналитическое выражение

$$y_t = ka^{b^t},$$

где a, b — положительные параметры, причем b меньше единицы;

k — асимптота функции.

Для решения экономических задач чаще всего используется случай, когда $\log a < 0$, $b < 1$.

В кривой Гомперца выделяются четыре участка: на первом — прирост функции незначителен, на втором — прирост увеличивается, на третьем — прирост примерно постоянен, на четвертом — происходит замедление темпов прироста и функция неограниченно приближается к значению k. В результате кривая напоминает латинскую букву S.

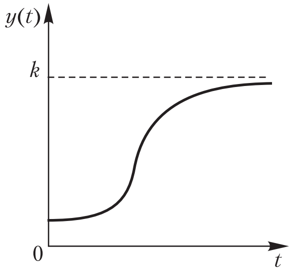


Рис. 8.7. Логистическая кривая $1/y_t = k + ab^t$

Логистическая кривая (кривая Перла–Рида) — возрастающая функция, наиболее часто выражаемая в виде

$$1/y_t = k + ab^t,$$

используется и другой вид кривой

$$y_t = k/(1 + be^{-at}).$$

В этих выражениях $y_t = a$ и b — положительные параметры, k — предельное значение функции при стремлении $t \to \propto$. Конфигурация графика логистической кривой близка к графику кривой Гомперца, но в отличие от нее логистическая кривая имеет точку симметрии, совпадающую с точкой перегиба.

С помощью этой функции хорошо описывается развитие нового производства. В начале производства нового вида товара технические средства производства еще недостаточно разработаны, издержки производства высоки и спрос на товар мал. В дальнейшем с увеличением спроса и усовершенствованием технических методов изготовления производство товаров увеличивается. Наступает насыщение товаров на рынке, рост производства замедляется и наступает стабилизация выпуска товаров на определенном уровне.

Рассмотренные кривые роста, наиболее часто используемые в экономических исследованиях, могут оказать помощь при выборе типа кривой.

Существует ряд подходов, облегчающих выбор кривой роста. Это, в первую очередь, статистические методы, например, метод последовательных разностей, характеристик прироста. Часто кривую роста выбирают исходя из значений критерия, в качестве которого принимают минимальное значение суммы квадратов отклонений фактических значений уровня от расчетных.

Однако нельзя недооценивать наиболее простой метод — визуальный. Подбирают кривую роста, форма которой соответствует реальному процессу. Если на графике временного ряда недостаточно просматривается тенденция развития, то целесообразно провести сглаживание ряда и затем подобрать кривую, соответствующую новому ряду. При этом целесообразно использовать современные пакеты компьютерных программ.

Пример 5. По данным месячного выпуска продукции фирмы рассчитать:

- коэффициенты линейного тренда $y_t = a_0 + a_1 t$;
- прогноз на 1 месяц вперед;
- коэффициенты параболического тренда $y_t = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$;
- прогноз на 1 месяц вперед.

Решение. Для расчета коэффициентов линейного и параболического трендов воспользуемся выражениями, полученными из системы нормальных уравнений. Перенесем начало координат (t'). Необходимые вычисления для линейного тренда занесем в табл. 8.7, для параболического — в табл. 8.8.

Таблица 8.7

t	t'	y_t	t^2	$y_t t$
1	–7	3423	49	–23 961
2	–5	3321	25	–16 605
3	–3	3210	9	–9630
4	–1	3122	1	–3122
5	1	3034	1	3034
6	3	2940	9	8820
7	5	2845	25	14 225
8	7	2739	49	19 173
Итого	0	24 634	168	–8066

Вычислим коэффициенты линейного тренда по формулам (8.4):

$$a_0 = \sum y_t / n = 24634/8 = 3079{,}25;$$

$$a_1 = \sum y_t t / \sum t^2 = -8066/168 = -48{,}01.$$

Таким образом, величина среднего уровня ряда при $t = 0$ составляет 3079,25, среднемесячное уменьшение выпуска продукции составляет 48, 01.

Уравнение линейного тренда: $y_t' = 3079{,}25 - 48{,}01t$.

Прогноз на 9-й месяц составит: $y_t' = 3079{,}25 - 48{,}01 \cdot 9 = 2647{,}16$.

Таблица 8.8

t	t'	y_t	t^2	$y_t \cdot t$	t^3	t^4	$y_t \cdot t^2$
1	–7	3423	49	–23961	–343	2401	167727
2	–5	3321	25	–16605	–125	625	83025
3	–3	3210	9	–9630	–27	81	28890
4	–1	3122	1	–3122	–1	1	3122
5	1	3034	1	3034	1	1	3034
6	3	2940	9	8820	27	81	26460
7	5	2845	25	14225	125	625	71125
8	7	2739	49	19173	343	2401	134211
Итого	0	24634	168	–8066	0	6216	517594

Вычислим коэффициенты параболического тренда по формулам (8.5).

$$a_0 = 3077{,}05;\ a_1 = -48{,}01;\ a_2 = 0{,}105.$$

Уравнение параболического тренда: $y_t' = 3077{,}05 - 48{,}01t + 0{,}105t^2$.

Прогноз на девятый месяц: $y_t' = 3077{,}05 - 48{,}01 \cdot 9 + 0{,}105 \cdot 9^2 = 2653{,}47$.

8.4. Расчет доверительных интервалов прогноза, адекватность и точность моделей

8.4.1. Доверительные интервалы прогноза

Прогнозные значения исследуемого показателя определяют путем подстановки в уравнение кривой времени t, соответствующей периоду упреждения. Полученный прогноз называют *точечным*.

В дополнение к точечному прогнозу можно определить границы возможного изменения прогнозируемого показателя, т. е. вычислить *интервальный прогноз*.

Если тренд характеризуется в виде прямой или полиномом второго порядка, то доверительный интервал можно представить в виде:

$$y'_{n+L} \pm S_y \cdot K^*,$$

где n — длина временного ряда;

L — период упреждения;

y'_{n+L} — точечный прогноз на момент $n + L$;

S_y^2 — дисперсия отклонений фактических наблюдений от расчетных;

$$S_y^2 = \Sigma\,(y_t - y_t')^2/(n - k),$$

где y_t — фактическое значение уровней ряда;

y_t' — расчетные значения уровней ряда;

k — число оцениваемых параметров выравнивающей кривой (для прямой $k = 2$, для параболы 2-й степени $k = 3$ и т. д.).

Значения K^* в зависимости от длины временного ряда и периода упреждения для прямой и параболы представлены в табл. 8.9 при доверительной вероятности 0,9.

Таблица 8.9

Длина ряда, n	Линейный тренд			Длина ряда, n	Параболический тренд		
	Период упреждения L				Период упреждения L		
	1	2	3		1	2	3
7	2,6380	2,8748	3,1399	7	3,948	5,755	8,152
9	2,3422	2,4786	2,6310	9	3,144	4,124	5,408
11	2,1827	2,2718	2,3706	11	2,763	3,384	4,189
13	2,0837	2,1463	2,2155	13	2,536	2,965	3,516
15	2,0153	2,0621	2,1131	15	2,386	2,701	3,100
17	1,9654	2,0015	2,0406	17	2,280	2,521	2,823
19	1,9280	1,9568	1,9877	19	2,201	2,391	2,627
21	1,8975	1,9210	1,9461	21	2,139	2,293	2,481
23	1,8738	1,8932	1,9140	23	2,090	2,217	2,371
25	1,8538	1,8701	1,8876	25	2,049	2,156	2,284

Пример 6. Для данных о производстве продукции за 9 лет (1995–2003) были оценены параметры модели

$$y_t' = 454 - 17{,}8\,t$$

и дисперсия отклонений фактических значений от расчетных $S_y^2 = 8{,}9$ (млн т)^2. Используя полученную модель, рассчитать интервальный прогноз производства в 1998 г., доверительную вероятность принять равной 0,9.

Найти нижнюю и верхнюю границу прогноза.

Решение. 1. Определим точечный прогноз:

$$y'_{10} = 454 - 17{,}8 \cdot 10 = 276 \text{ млн т.}$$

2. Вычислим интервальный прогноз:

По данным задачи $n = 9$, $L = 1$, линейный тренд, по таблице $K^* =$ $= 2{,}3422$

$$S_y = \sqrt{S_y^2} = \sqrt{8{,}9} = 2{,}98.$$

$$y'_{n+L} \pm S_y \cdot K^* = 276 \pm 2{,}98 \cdot 2{,}3422 = 276 \pm 6{,}98.$$

Ответ. Точечный прогноз равен 276 млн т.

Нижняя граница прогноза составляет 269,02 млн т.

Верхняя граница прогноза равна 282,98 млн т.

8.4.2. Проверка адекватности моделей

Независимо от вида выбранной модели вопрос о возможности ее применения для прогнозирования экономического показателя может быть решен только после установления адекватности.

Проверка адекватности выбранных моделей реальному процессу строится на анализе случайной компоненты. Случайная компонента получается после выделения из исследуемого ряда тренда и периодической составляющей. Если временной ряд не имеет сезонных колебаний, то для аддитивной модели

$$y_t = u_t + e_t.$$

Ряд остатков может быть получен как отклонения фактических уровней y_t от расчетных y_t':

$$e_t = y_t - y_t'.$$

При использовании кривых роста y_t' вычисляют, подставляя в уравнение кривой соответствующие значения времени.

Считают, что модель адекватна описываемому процессу, если значения остаточной компоненты удовлетворяют свойствам случайности, независимости, и она подчиняется нормальному закону распределения.

При правильном выборе вида тренда отклонения от него будут носить случайный характер и изменение остаточной случайной величины не связано с изменением времени. По выборке, полученной для всех временных значений на рассматриваемом интервале, проверяется гипотеза о независимости последовательности значений e_t от времени или наличие тенденции в ее изменении. Для проверки этого свойства может быть использован критерий определения тенденции с помощью «восходящих и нисходящих» серий.

Если вид функции тренда выбран неудачно, то последовательные значения остатков ряда могут не обладать свойствами независимости, так как могут коррелировать между собой. В этом случае говорят, что имеет место автокорреляция ошибок.

Наиболее распространенным приемом обнаружения автокорреляции является метод Дарбина–Уотсона, связанный с автокорреляцией между соседними остаточными членами ряда. Определяется критерий Дарбина–Уотсона по формуле:

$$d = \Sigma (e_t - e_{t-1})^2 / \Sigma e_t^2 .$$

Применение критерия основано на сравнении величины d, рассчитанной по формуле, с теоретическими значениями d_1 и d_2, взятыми из табл. 8.10.

В случае когда в остатках имеется положительная автокорреляция, то при этом:

- если $d < d_1$, то гипотеза об отсутствии автокорреляции отвергается;
- если $d > d_2$, то гипотеза об отсутствии автокорреляции не отвергается;
- если $d_1 \le d \le d_2$, то нет достаточных оснований для принятия решений.

Когда расчетное значение $d > 2$, то в e_t существует отрицательная автокорреляция и с значениями d_1 и d_2 сравнивается величина $4 - d$.

Таблица 8.10. Значения критерия Дарбина–Уотсона при доверительной вероятности 0,95

n	$K' = 1$		$K' = 2$		$K' = 3$	
	d_1	d_2	d_1	d_2	d_1	d_2
15	1,08	1,36	0,95	1,54	0,82	1,75
17	1,13	1,38	1,02	1,54	0,9	1,71
19	1,18	1,4	1,08	1,53	0,97	1,68
21	1,22	1,42	1,13	1,54	1,03	1,67

Окончание табл. 8.10

n	$K' = 1$		$K' = 2$		$K' = 3$	
	d_1	d_2	d_1	d_2	d_1	d_2
23	1,26	1,44	1,17	1,54	1,08	1,66
25	1,29	1,45	1,21	1,55	1,12	1,66

В связи с тем что временные ряды экономических показателей невелики, на основе анализа показателей асимметрии и эксцесса можно произвести проверку ряда остатков на нормальность распределения по формулам:

$$\text{А} = \Sigma e_t^3 \Big/ n\sqrt{(\Sigma e_t^2/n)^3},$$

$$\text{Э} = \Sigma e_t^4 \Big/ n\sqrt{(\Sigma e_t^2/n)^2 - 3},$$

$$\sigma_{\text{А}} = \sqrt{6(n-2)/(n+1)(n+3)},$$

$$\sigma_{\text{Э}} = \sqrt{24n(n-2)(n-3)\big/(n+1)^2(n+3)(n+5)},$$

где А — выборочная характеристика асимметрии;

Э — выборочная характеристика эксцесса;

$\sigma_{\text{А}}$ — среднеквадратическая ошибка выборочной характеристики асимметрии;

$\sigma_{\text{Э}}$ — среднеквадратическая ошибка выборочной характеристики эксцесса.

Если одновременно выполняются неравенства:

$$|\text{А}| < 1{,}5\sigma_{\text{А}};\ |\text{Э} + 6/(n+1)| < 1{,}5\sigma_{\text{Э}},$$

то гипотеза о нормальном характере распределения случайной компоненты не отвергается.

Если выполняется хотя бы одно из неравенств:

$$|\text{А}| \geq 2\sigma_{\text{А}};\ |\text{Э} + 6/(n+1)| \geq 2\sigma_{\text{Э}},$$

то гипотеза о нормальном характере распределения отвергается.

8.4.3. Характеристики точности моделей

О точности модели можно судить по величине ошибки прогноза. *Ошибка прогноза* — величина, характеризующая разницу между фактическим и прогнозным значением показателя.

Абсолютная ошибка прогноза определяется

$$\Delta_t = y'_t - y_t,$$

где y'_t — прогнозное значение показателя;

y_t — фактическое значение.

На практике используется *относительная ошибка прогноза*:

$$\delta_t = 100(y'_t - y_t)/y_t .$$

Средние абсолютные и относительные ошибки по модулю:

$$|\overline{\Delta}_t| = (\Sigma|y'_t - y_t|)/n; \quad |\overline{\delta}| = (100\Sigma|(y'_t - y_t)/y_t|)/\,n .$$

Если абсолютная и относительная ошибки больше нуля, то это свидетельствует о завышенной прогнозной оценке, если меньше нуля, то заниженной оценке.

Пример 7. Данные об объеме перевозок грузов и прогнозы указаны в табл. 8.11.

Таблица 8.11

t	1	2	3	4	5	6	7
y_t	268	267	258	262	254	257	263
Прог. 1 модели	275	253	250	269	253	248	250
Прог. 2 модели	260	275	253	278	263	251	269

Найти относительную ошибку по модулю и среднюю абсолютную ошибку по модулю для прогнозов по двум моделям.

Решение. Результаты расчета относительной ошибки и средней абсолютной ошибки по заданным моделям заносим в табл. 8.12.

Таблица 8.12

t	y_t	Прогнозы 1 модели	Прогнозы 2 модели	Абс. ошибка по модулю 1 модели	Абс. ошибка по модулю 2 модели	Отн. ошибка по модулю 1 модели	Отн. ошибка по модулю 2 модели
1	267	275	260	8	7	2,996	2,545
2	267	253	275	14	8	5,243	3,162
3	258	250	253	8	5	3,101	2,0
4	262	269	278	7	16	2,672	5,948

Окончание табл. 8.12

t	y_t	Прогнозы 1 модели	Прогнозы 2 модели	Абс. ошибка по модулю 1 модели	Абс. ошибка по модулю 2 модели	Отн. ошибка по модулю 1 модели	Отн. ошибка по модулю 2 модели
5	253	253	263	0	10	0	3,953
6	257	248	251	9	6	3,502	2,419
7	263	250	269	13	6	4,943	2,4
Средняя ошибка				8,43	8,29	3,208	3,204

Ответ. Предпочтительнее 2-я модель, так как меньше величины средней абсолютной и средней относительной ошибок.

РАЗДЕЛ 3

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Глава 9

Экономико-математические модели

Решение современных экономических проблем и анализ экономической ситуации невозможен без использования в той или иной мере математических моделей. Сама по себе формулировка основного принципа экономической деятельности — максимум эффективности при минимуме затрат ресурсов — подразумевает активное участие математического моделирования в обработке обширных баз данных, в оперативной оценке ситуации, в прогнозировании деятельности фирмы.

Математическую модель можно определить как внутренне непротиворечивую замкнутую систему математических соотношений (объект конечной сложности), предназначенную для воспроизведения определенного качества (или группы определенных качеств) изучаемого реального явления или процесса. Математические модели представляют собой основу компьютерного моделирования и обработки информации. Они развивают наши представления о закономерностях экономических процессов и способствуют формированию образа мышления и анализа на новом, более высоком уровне.

В последнее время для обозначения специфичности класса математических моделей, используемых в экономике, используют термин «экономико-математическое моделирование». И это не случайно, поскольку экономическая теория давно уже использует элементы математики в своих выводах. Более того, необходимость решения актуальных экономических проблем часто инициирует и развитие математического аппарата (например, появление класса продуктивных матриц в линейной алгебре обусловлено исследованием моделей межотраслевого баланса; математическое программирование в своей основе имеет сугубо экономический аспект оптимального планирования распределения ограниченных ресурсов).

Говоря о приложениях математики в экономике, необходимо отметить, что еще в 1494 г. францисканский монах и математик Лука Пачоли сумел методично изложить в фундаментальном труде «Сумма арифметики, геометрии, учения о пропорциях и соотношениях» в трактате «О счетах и записях» основные принципы, на которых основан современный бухгалтерский учет.

Простейшие математические модели на уровне таблиц и формул использовались еще Ф. Кене в 1758 г. («Экономические таблицы»), А. Смитом (классическая макроэкономическая модель), Д. Рикардо (модель международной торговли). В XIX в. усилиями Л. Вальраса, О. Курно, В. Парето, Ф. Эджворта и др. были сформированы основы математического подхода к исследованию рыночной экономики. В XX в. математическое моделирование экономических процессов получило бурное развитие; достаточно упомянуть Нобелевских лауреатов в области экономики — В. Леонтьева, Д. Хикса, Р. Солоу, П. Самуэльсона. Значительный вклад в развитие экономико-математических моделей внесли отечественные исследователи: Е. Е. Слуцкий, В. С. Новожилов, Л. В. Канторович.

9.1. Предназначение модели

Развитие микро- и макроэкономики и прикладных экономических дисциплин связано со все возрастающим уровнем их формализации и наличием высокой степени абстракции. Основа для этого была заложена прогрессом в области прикладной математики в XX в.: развитием теории игр, математической статистики, математического программирования. Использование математики в экономических приложениях, сформировавшее область экономико-математического моделирования, позволяет выделить следующие основные аспекты:

- определять и формально описывать наиболее существенные связи экономических объектов;
- из полученных модельных соотношений путем обработки базы данных исходной информации получать дедуктивным методом выводы, адекватные исследуемому объекту в пределах функциональной надежности модели;
- получить новые знания об объекте и зависимостях входящих в него формализованных параметров;

- компактно формулировать основные положения и выводы экономической теории;
- разрабатывать стратегии управления экономическими объектами и поведения фирмы в условиях рынка.

Укажем логическую цепочку достаточно общих принципов построения математических моделей.

1. Формулировка предмета и цели исследования реального объекта. Таким объектом выступает некоторая совокупность каких-либо качеств исследуемого явления или процесса.

2. Выделение в экономическом объекте наиболее важных структурных и функциональных элементов и их характеристик.

3. Формализация определяющих элементов экономического объекта и их взаимосвязей.

4. Определение вида исходной информации (входные параметры модели) и выходной информации (расчетные параметры модели).

5. Постановка задачи — создание основы математической модели — получение замкнутой и внутренне непротиворечивой совокупности математических соотношений, предназначенных для описания исследуемого экономического объекта через расчетные переменные. В информационном аспекте модель является оператором отражения информационного поля реального объекта в конечную совокупность расчетных информационных признаков. Выбор этого оператора зависит от автора модели.

6. Определение функциональной надежности модели — установление области ее адекватности исследуемому объекту.

Следует особо отметить отличие математической модели от математической задачи. Поясним это на примере. Пусть X — область исходной информации модели, Y — область прогнозной информации модели, а F — оператор пересчета множества X в множество Y. Тогда формула

$$Y = F(X) \tag{9.1}$$

определяет модель переработки (отражения) множества X в множество Y. Если говорить о математической задаче, то допустимая область X определяется только законностью выполнения математических операций, входящих в оператор F. Для математической модели еще требуются и ограничения естественного характера как на множество X, так и на множество Y; последнее ограничение обозначает установление области адекватности. Например, удлинение ΔL металлического стержня при его нагреве на температуру ΔT подсчитывается по формуле

$$\Delta L = \alpha \Delta T, \tag{9.2}$$

где α — коэффициент относительного удлинения материала стержня (физическая константа). С точки зрения математической задачи уравнение (9.2) представляет собой линейную функцию с неограниченными областями определения и изменения. Однако с точки зрения математической модели реального физического процесса, во-первых, нет таких материалов, которые могли бы выдержать нагрев, скажем, на 10 000 градусов, т. е. формула (9.1) приемлема лишь в определенном диапазоне нагрева для данного материала; во-вторых, вне этой зоны процесс удлинения является уже нелинейным и нагрев приводит к совершенно другим физическим процессам в металлическом стержне.

Поскольку модель создается для получения определенной прогнозной информации, то в указанную выше логическую цепочку 1–6 следует добавить еще несколько этапов, имеющих отношение к процессу моделирования.

7. Подбор оптимального метода решения математической задачи, составляющей основу модели (в том числе и выбор вычислительной схемы решения задачи).

8. Выполнение прогнозного этапа моделирования — «проигрывание» на модели различных сценариев (сочетаний исходных параметров модели) как проведение многовариантных расчетов с целью создания базы расчетной информации как количественного образа исследуемого объекта.

Поясним несколько подробнее суть двух последних этапов. Погрешность математического моделирования, как меру отклонения модели от реального объекта, можно упрощенно представить в виде суммы:

$$\delta = \delta_m + \delta_c + \delta_i, \tag{9.3}$$

где δ_m — погрешность собственно модели, δ_c — погрешность вычислительной схемы, δ_i — погрешность в исходной информации.

Погрешность δ_m обусловлена упрощениями, которые имеют место при переходе от реального объекта бесконечной сложности к математической модели — объекту конечной сложности. В этом плане модель — это как бы фотоснимок, она всегда «беднее» оригинала. Говоря языком теории множеств, если M и R — соответственно множества информационных признаков модели и реального объекта, то модель всегда представляет собой отражение множества R в множество M. Отражение «в», или гомоморфизм, несет в себе потерю информативности в отличие от отражения «на» (или изоморфизм), которое является взаимно однозначным.

Погрешность δ_c обусловлена вычислительной реализацией математической модели: упрощения при переходе от исходных уравнений модели к разностным, особенности вычислительных схем, конечная разрядная сетка компьютера и др. Например, при решении систем линейных алгебраических уравнений высокого порядка (задачи математического программирования, задачи межотраслевого баланса, численное решение систем дифференциальных и разностных уравнений) накопление вычислительной погрешности только за счет конечного представления чисел в разрядной сетке компьютера может существенно искажать расчетные результаты. Именно поэтому для многих моделей этап 7 в упомянутой выше схеме является существенным и важным.

Погрешность δ_i характеризует детальность задания исходной информации. Как правило, эта величина обусловлена рядом причин: трудности при проведении эксперимента на объекте исследования, несовершенство самого экспериментального исследования, статистическая неопределенность результатов измерений. Зачастую в силу объективных причин определение входных параметров модели имеет погрешность в десятки процентов и более, а иногда часть параметров неизвестна вообще (например, в случае распределенных параметров — когда коэффициенты уравнений представляют собой функциональные зависимости). В таком случае модель является некорректно сформулированной, с информационными «дырами». Как правило, при удачно подобранной математической модели и хорошей схеме ее численной реализации основной вклад в погрешность моделирования, согласно формуле (9.3), вносит неточность входной информации. Это объективная реальность, и игнорирование этого факта невозможно.

Для устранения информационных «дыр» в моделях часто возникает необходимость подбора недостающей исходной информации. Вообще говоря, эта задача является некорректной с точки зрения математической классификации и требует применения сложного аппарата решения обратных задач. В практике моделирования обычно применяется более простая схема, когда путем многовариантных расчетов подбирается недостающая входная информация так, чтобы она наилучшим образом соответствовала некоторому известному объему выходной информации, а также некоторым априорным и экспертным оценкам. Процесс заполнения информационных «дыр» является частью общего процесса моделирования (этап 8). В свете этого представляется нецелесообразным выбор чрезмерно усложненной математической модели и численной схемы ее реализации повышенной точности: все равно ошибка моделирования будет определяться погрешностью исходной информации. Более того, требование оперативности моделирования при многовариантности расчетов делает предпочтительным выбор более простых модельных и вычислительных схем, тем более, что даже незначительное повышение точности расчетов (уменьшение δ_m и δ_c) приводит к значительному увеличению сложности и громоздкости модели.

В свете сказанного можно сформулировать основные требования, которым должны удовлетворять математические модели.

А. Модель не должна быть чрезмерно сложной, так как это приводит к неоправданно большим затратам ресурсов при ее реализации. Следует соотносить сложность и детальность модели с уровнем достоверности исходной информации.

Б. Не следует строить модель всеобъемлющего прогноза реального объекта. Это приводит к чрезвычайно громоздким, необозримым и плохо анализируемым математическим моделям, которые к тому же могут оказаться еще и плохо обусловленными (неустойчивыми). Если возникает необходимость в прогнозе ряда разнородных качеств реального процесса, то целесообразно построить совокупность или иерархию соподчиненных относительно простых математических моделей.

В. Сложность модели должна соответствовать степени разработанности математического аппарата, а не превосходить ее; в противном случае математическая модель будет неразрешимой.

Вообще говоря, нельзя сформулировать единые жесткие правила создания математических моделей, и в этом плане можно согласиться с Е. С. Вентцель, что разработка моделей — это искусство. Более того, у разных исследователей модели одного и того же процесса могут существенно отличаться, и потому целесообразна конкуренция или «спор» моделей как способ их селекции.

9.2. Классификация моделей

В экономико-математическом моделировании установлена следующая классификация моделей по основным типам. Модели разделяются на классы по ряду признаков, относящихся к особенностям моделируемых объектов, целям моделирования и используемого инструментария.

Макроэкономические модели описывают экономику как единое целое со связями между агрегированными материальными и финансовыми показателями (ВВП, потребление, инвестиции, занятость, денежная масса, государственный долг, инфляция и др.).

Микроэкономические модели описывают взаимодействие структурных и функциональных составляющих экономики либо их поведение в отдельности в рыночной среде.

Теоретические модели являются аппаратом изучения общих свойств экономики и ее составляющих на основе дедукции выводов из формальных предпосылок.

Прикладные модели представляют собой аппарат оценок параметров конкретных экономических объектов, выработки рекомендаций для принятия экономических решений и разработки стратегий поведения фирм на рынке.

Равновесные модели описывают такие состояния экономики, когда результирующая всех воздействий на нее равна нулю. Как правило, равновесные модели являются дескриптивными, описательными.

Оптимизационные модели используются в теории рыночной экономики на микроуровне (оптимизация деятельности потребителя, производителя или фирмы). На макроуровне результат выбора экономическими субъектами рационального поведения может приводить к состоянию относительного равновесия.

Статические модели описывают состояние экономических объектов в определенный момент или усредненно за некоторый период времени. При этом все параметры статических моделей полагаются фиксированными величинами, не зависящими от времени.

Динамические модели включают в себя зависимость и взаимосвязи переменных модели во времени. Они используют обычно аппарат дифференциальных и разностных уравнений и вариационного исчисления, где независимой переменной является время.

Детерминированные модели предполагают в своей основе только жесткие функциональные связи между переменными модели.

Стохастические модели допускают наличие случайных связей между переменными модели. Эти модели используют аппарат теории вероятностей и математической статистики.

Модели с элементами неопределенности используются для моделирования ситуаций, когда для определяющих факторов невозможно собрать статистические данные, и их значения не определены. В этих моделях используются аппараты теории игр и имитационного моделирования.

Экспертные модели — разрабатываются и имеют применение в последние годы в исследованиях ряда экономических процессов, когда в условиях отсутствия количественных характеристик за основу принимаются мнения экспертов с оценками разных аспектов по определенной шкале. Эти оценки могут быть интерпретированы в виде векторов некоторой размерности, которые, в свою очередь, можно сравнивать по мере их близости. Экспертные модели наиболее широко используются при реинжиниринге бизнес-процессов.

9.3. Модели в структуре экономической информации

Современное предназначение модели состоит в том, что она является инструментом обработки информации. Соответственно, комплекс математических моделей сегодня представляет собой инструмент обработки баз данных или переработки первичной информации в базу данных вторичной информации (ее можно назвать прогнозной информацией). Таким образом, математические модели можно интерпретировать как оператор F отражения исходной (первичной) информации X в прогнозную или специализированную информацию Y — см. формулу (9.1).

Естественно, что база данных прогнозной информации обладает гораздо большей ценностью и стоимостью, нежели база исходной информации — зачастую это соотношение измеряется порядками. Это обстоятельство представляется вполне реальным, особенно в свете становления общества нового типа — информационного общества, в котором главным мерилом будут являться новые и еще не реализованные знания. Уже сегодня информационный бизнес представляет собой наиболее динамично развивающийся сегмент мирового рынка услуг. При этом специализированная информация (база данных вторичной информации) пользуется особенно повышенным спросом в различных сферах экономической деятельности и политики: экономические прогнозы, консультации по стратегии поведения фирм на рынке и т. д.

В свете сказанного выше появляются новые аспекты, связанные с оперированием с базами данных исходной и специализированной информации. Это прежде всего деятельность по обеспечению информационной безопасности, которая в основном сводится к ограничению доступа к информации, что приводит к созданию «информационных дыр» в исходной информации, о которых говорилось ранее. В свою очередь такая деятельность неизбежно будет приводить к образованию «информационных дыр» в базах специализированной информации и, как следствие, к информационным войнам и информационным кризисам; такие явления наблюдаются уже сегодня.

Информационный тип экономического роста, когда прирост производства обусловлен в основном за счет использования информации, постепенно становится преобладающим не только в развитых странах, но и в целом в мировой экономике. Образуется информационное пространство, как одна из сфер мировой экономики; его основой являются информационные технологии и информационно-компьютерные технологии. В рамках этого пространства складывается качественно новый вид международных экономических отношений — информационные отношения, оперирующие с продуцированием и использованием интеллектуального продукта (знаний, информации, алгоритмов, «ноу-хау», компьютерных программ и т. д.). Информационные отношения меняют привычный облик всего мирового сообщества; они определяют его экономическую и социальную динамику и оказывают мультипликативное воздействие на темпы экономического и технологического развития во всем мире.

В начале XXI столетия мировое информационное сообщество уже становится реальностью. Подтверждением является также и то, что рациональное развитие мирового хозяйства в условиях экологизации мировой экономики возможно лишь при глобальной информационной инфраструктуре.

Безусловно, международная глобальная сеть Интернет являет собой образ информационных сетей будущего. При этом осуществляется и процесс переработки информации — ее сбор, обработка, накопление и хранение в виде специализированных баз данных, предоставление, передача и защита. Как уже говорилось ранее, обработка информации происходит при помощи специфического программного обеспечения, а также соответствующих компьютерных реализаций комплекса математических моделей. Информация, являющаяся результатом такой обработки, является наукоемкой продукцией и обладает особой экономической значимостью и ценностью. Пользователь такой международной сети по сути дела является участником единого информационного сообщества.

Глава 10

Модели инфляции

Инфляция (от лат. inflatio — вздутие) — это долговременный процесс снижения покупательной способности денег. Различают открытую и скрытую (или подавленную) инфляцию. *Открытая* инфляция проявляется в продолжительном росте цен в условиях свободных подвижных цен. *Скрытая* инфляция проявляется в усилении товарного дефицита в условиях жесткого государственного контроля за ценами.

Уровень инфляции при ее открытой форме определяется темпом прироста уровня цен. В практических расчетах используются индексы цен.

Обычно выделяют три вида инфляции: инфляцию спроса, инфляцию издержек и структурную инфляцию.

Инфляция спроса проявляется в превышении денежного спроса на товары и услуги над возможностью их предложения на рынке. Обычно этот вид инфляции связан с эмиссией денег, не обеспеченных товарным покрытием, с существенным бюджетным дефицитом, а также с высоким государственным долгом.

Инфляция издержек проявляется в росте издержек производства. В ее основе лежит увеличение предельных и средних издержек при нерастущем объеме производства. Повышение удельных издержек сокращает объем производства при сложившемся уровне цен, что, в свою очередь, приводит к повышению цен на продукцию. Например, в российской экономике инфляция издержек проявилась в относительно быстром росте цен на энергоносители и тарифов на железнодорожные перевозки, что повлияло на повышение общего уровня цен в отечественной экономике.

Структурная инфляция — это инфляция, носящая структурный характер и определяемая перестройкой стоимостных пропорций в экономике. В частности, структурная инфляция может иметь место под влиянием научно-технического прогресса, например, разработка и внедрение во все отрасли экономики современных информационных технологий.

10.1. Измерение денежной массы

Какой-либо единой номенклатуры агрегатов денежной массы не существует. Ее состав и структура различны для разных стран и определяются, прежде всего, уровнем развития и характером денежного рынка в стране, а также особенностями политики, проводимой Центральным банком. Наиболее часто в денежной массе выделяют следующие четыре агрегата:

M_0 — банкноты и монеты, находящиеся в обращении вне банковской системы (наличные деньги);

M_1 — наличные деньги плюс вклады в коммерческих банках до востребования без депозитов органов государственного управления;

M_2 — сумма M_1 и среднесрочных (до 4 лет) вкладов в коммерческих банках;

M_3 — сумма M_2 и долгосрочных вкладов в коммерческих банках.

В денежной статистике России в агрегат M_2 включается объем наличных денег в обращении и остатков средств в национальной валюте на расчетных, текущих счетах и депозитах нефинансовых предприятий, организаций и физических лиц-резидентов. Кроме того, используются понятия «квазиденьги» и «широкие деньги». Первый агрегат включает в себя срочные и сберегательные депозиты в иностранной валюте. Квазиденьги являются ликвидными депозитами банковской системы, которые непосредственно не используются в качестве средства платежа и обычно имеют меньшую скорость обращения, чем деньги агрегата M_1. Совокупность агрегатов M_1 и квазиденьги образует агрегат «широкие деньги».

Под деньгами в узком смысле слова в макроэкономике подразумевается агрегат M_1. Агрегаты M_2 и M_3 содержат дополнительные разновидности финансовых активов, которые более соответствуют функции сохранения ценности, нежели функции средства платежа.

По сравнению с экономически развитыми странами в России велика доля наличных денег в общей денежной массе. Это объясняется относительно узким спектром денежных активов, предлагаемых рынком, которые могут служить средством сохранения ценности в условиях высокого уровня инфляции. Кроме того, наличные деньги, в отличие от банковских депозитов, обеспечивают анонимность их владельца, что особенно ценится в условиях широкого распространения теневой экономики.

10.2. Причины и условия инфляции

Необходимым условием развития инфляции является ускорение роста номинального количества денег или скорости их обращения по сравнению с ростом реального национального дохода. К этому выводу можно прийти на основе анализа тождественного уравнения

$$PY = MV, \tag{10.1}$$

констатирующего, что количество денег, израсходованных на покупку произведенной продукции (произведение цены P на объем товара Y), равно количеству находящихся в обращении денег M, умноженному на скорость их обращения V.

Введем в рассмотрение темп прироста уровня цен π, номинального количества денег m, скорости их обращения v и реального дохода y:

$$\pi = P'/P,\ m = M'/M,\ v = V'/V,\ y = Y'/Y. \tag{10.2}$$

Здесь и далее штрих означает дифференцирование по времени. Выведем уравнение, связывающее темпы прироста; для этого нужно взять логарифм от обеих частей уравнения (10.1) и затем продифференцировать полученное уравнение. После выполнения этих операций получим:

$$\pi + y = m + v. \tag{10.3}$$

Для возникновения инфляции ($\pi > 0$) необходимо выполнение хотя бы одного из трех условий:

$$m > y \text{ при } v = 0, \tag{10.4}$$

$$v > y \text{ при } m = 0, \tag{10.5}$$

$$m + v > y. \tag{10.6}$$

Здесь возникают следующие вопросы: являются ли эти условия одновременно и причиной инфляции, что обусловливает выполнение приведенных неравенств. В зависимости от ответа на эти вопросы различают монетарные и немонетарные факторы инфляции.

Сторонники *монетарных концепций* считают одной из основных причин инфляции рост номинального количества денег, превышающий рост производства благ при неизменной скорости обращения денег. Причиной инфляции в этом случае является либо банковская система, слабо контролирующая размер денежной базы и процесс эмиссии чековых денег, либо население, увеличивающее использование своих долговых обязательств в качестве средств платежа. Инфляция может возникнуть и при неизменном номинальном количестве денег, когда скорость их обращения растет быстрее, чем объем производства. Это может иметь место при уменьшении спроса на реальные кассовые остатки вследствие усовершенствования техники расчетов (в частности, внедрение и использование новых ИКТ) или замены денег ценными бумагами. *Галопирующая* инфляция сама становится причиной сокращения спроса на деньги из-за высоких альтернативных затрат держания реальной кассы. Тогда обе указанные выше причины взаимодействуют друг с другом и ускоряют инфляционный процесс.

В *немонетарных* концепциях неравенство (10.6) является лишь необходимым условием, но не причиной инфляции. Причиной инфляции может быть рост затрат производства вследствие превышения роста заработной платы над ростом производительности труда или превышения роста налогов над ростом реального дохода. Иными словами, инфляция может возникнуть из-за борьбы за перераспределение национального дохода; при этом не имеет значения, кто является инициатором повышения затрат производства. В данном случае непременным условием повышения уровня цен является рост количества находящихся в обращении денег.

На рис. 10.1 показан разворачивающийся процесс инфляции как результат борьбы за перераспределение национального дохода. Пусть при $P_0 = 1$ номинальная величина национального дохода $Y_0 = 100$, причем доля домашних хозяйств равна 40, доля предпринимателей 40, а государства 20. Если при неизменном объеме производства профсоюзам удается повысить повышения денежной оплаты до 60, то номинальный национальный доход вырастет до 120 и уровень цен повысится в 1,2 раза. Предприниматели вследствие снижения реального объема прибыли повысят цены до уровня 1,4, доведя национальный доход до 140. Для сохранения своего реального дохода государство доводит номинальную величину налоговых поступлений до 30. Тогда в итоге величина национального дохода $Y = 150$, а новый уровень цен $P = 1{,}5$.

Заметим, что в данном примере непременным условием повышения уровня цен является увеличение объема денежной массы, находящей-

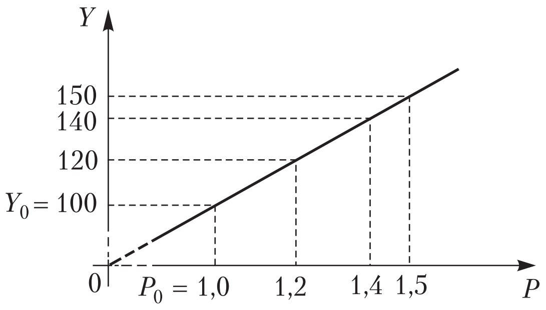


Рис. 10.1

ся в обращении. Причиной инфляции может стать увеличение совокупного спроса; в таком случае уровень цен начнет повышаться до тех пор, пока не наступит равновесие между совокупным спросом и предложением.

Структурные сдвиги спроса также являются немонетарными факторами роста уровня цен. При быстро обновляющемся ассортименте производимых благ спрос переключается с традиционных товаров на новые престижные товары, что повышает их цены с одновременным сокращением предложения традиционных товаров.

Источником инфляции может быть рыночная власть монополий, олигополий и государства, реализуемая в административном повышении цен.

Ожидаемое в будущем обесценение денег выражается в повышенной ставке процента. Это дестабилизирует кредитный рынок и подрывает инвестиционный процесс.

Монетарные и немонетарные причины инфляции могут действовать одновременно и не являются взаимоисключающими.

10.3. Инфляционное финансирование дефицита государственного бюджета

В современной экономике дефицит государственного бюджета как превышение государственных расходов над доходами является весьма распространенным явлением. В условиях хронического дефицита бюджета обычные источники пополнения дохода часто оказываются неэффективными (налоги, внутренний долг, приватизация и др.). Проанализируем роль налогов как источника пополнения государственных доходов.

Пусть T — средняя ставка налога, а B_T — налоговая база. Тогда поступления от налога равны TB_T. Налоговая база не является постоянной величиной, а зависит от величины ставки налога: $B_T = f(T)$. При этом с увеличением ставки налога, начиная с некоторой ее величины, налоговая база начинает уменьшаться. Например, увеличение ставок налога на прибыль приводит к снижению деловой активности, банкротству ряда фирм, переходу фирм в теневой сектор — иными словами, объем налогооблагаемой прибыли снижается. До тех пор пока налоговая ставка T не достигла некоторого критического уровня T^*, рост налоговой ставки вызывает рост поступлений в государственную казну. Однако начиная с уровня T^*, дальнейший рост налоговой ставки приводит к снижению налогового дохода. Указанный вид зависимости $B_T = f(T)$ носит название кривой Лаффера (по имени американского экономиста А. Лаффера, впервые предложившего эту модель в 1982 г.), рис. 10.2.

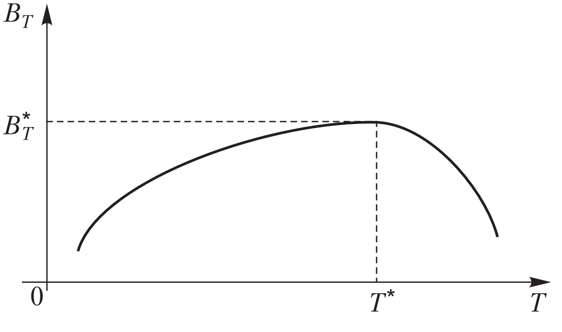


Рис. 10.2

При исчерпании доступных способов финансирования государственного дефицита государство может использовать денежную эмиссию. Такой источник дохода называется *сеньоражем*. Реальный сеньораж представляет собой изменение объема эмиссии, скорректированное с учетом неизменного уровня цен P:

$$R_s = \frac{d(M/P)}{dt} = \frac{1}{P}\frac{dM}{dt} = \frac{M'}{P}. \qquad (10.7)$$

Это выражение удобно преобразовать к виду

$$R_s = \frac{M'}{P} = \frac{M'}{M}\frac{M}{P} = mz, \qquad (10.8)$$

где $m = M'/M$ и $z = M/P$ — соответственно темп роста денежной массы и реальные запасы денежных средств.

Предпринимая эмиссию, государство увеличивает предложение денег, что ведет к росту инфляции. Рост цен снижает покупательную способность денег, и в результате потребители несут потери, которые называются *инфляционным налогом*. Реальный инфляционный налог представляет собой изменение денежной массы, обусловленное только изменением уровня цен (сама денежная масса полагается неизменной):

$$I_T = -\frac{d(M/P)}{dt} = \frac{M}{P^2}\frac{dP}{dt}. \tag{10.9}$$

Преобразуем это выражение к виду:

$$I_T = \frac{M}{P^2}\frac{dP}{dt} = \frac{M}{P}\frac{P'}{P} = \pi z, \tag{10.10}$$

где, как и в п. 10.1, π — темп инфляции.

В соответствии с количественной теорией денег, при отсутствии экономического роста и в состоянии длительного (стационарного) равновесия темп инфляции π равен темпу роста денежной массы m, а это означает, что величина инфляционного налога равна величине сеньоража: $R_s = I_T = \pi z$.

Величина сеньоража, как и налоговый доход, не растет монотонно с увеличением объемов денежной эмиссии. Естественно полагать, по аналогии с формой кривой Лаффера, что существует некоторое значение π^* темпа инфляции, при котором доходы бюджета от эмиссии достигают максимума (зависимость сеньоража от темпа инфляции полностью аналогична кривой Лаффера на рис. 10.2). За этим пороговым значением увеличение инфляции приводит к снижению налоговой базы и уменьшению сеньоража, так что темп инфляции π^* является оптимальным для государственной финансовой политики.

10.4. Модель Фридмана

В 1971 г. М. Фридманом была предложена модель, позволяющая определить оптимальный темп инфляции π^* для максимума величины сеньоража. Основные предпосылки модели сводятся к следующему.

1. Функция спроса индивида (типичного экономического агента) на деньги имеет вид

$$(M/P)_d = f(y, \pi^e), \quad f'_y(y, \pi^e) > 0, \; f'_{\pi^e}(y, \pi^e) < 0, \qquad (10.11)$$

где y — реальный доход индивида, π^e — ожидаемый темп инфляции. Одним из основных предположений модели является принятие неизменности реальной процентной ставки ($r = \text{const}$); это реализует неявную предпосылку о том, что инфляция не влияет на процесс распределения ресурсов.

2. Темп инфляции не влияет на темп роста экономики, т. е. доходы от инфляции не рассматриваются в качестве возможного источника экономического роста.

3. Предполагается ситуация совершенного предвидения, т. е. экономические агенты знают заранее или угадывают будущий темп инфляции. Иными словами, реальный темп инфляции совпадает с ожидаемым:

$$\pi = \pi^e. \qquad (10.12)$$

Агрегированную функцию спроса на деньги, в соответствии с формулой (10.11), можно записать в виде

$$M_D = NPf(y, \pi) = M_s = M, \qquad (10.13)$$

где M_s — предложение денег, M — денежная масса, N — численность населения. Прологарифмируем равенство $NPf(y, \pi) = M$:

$$\ln N + \ln P + \ln f(y, \pi) = \ln M.$$

Затем возьмем производную по времени:

$$\frac{N'}{N} + \frac{P'}{P} + \frac{1}{f}\frac{df}{dy}y' + \frac{1}{f}\frac{df}{d\pi}\pi' = \frac{M'}{M}. \qquad (10.14)$$

Преобразуем два последних слагаемых в левой части этого уравнения:

$$\frac{1}{f}\frac{df}{dy}y' = \left(\frac{y}{f}\frac{df}{dy}\right)(y'/y) = \eta_{fy}\,g;$$
$$\frac{1}{f}\frac{df}{d\pi}\pi' = \left(\frac{\pi}{f}\frac{df}{d\pi}\right)(\pi'/\pi) = \eta_{f\pi}\,g_\pi, \qquad (10.15)$$

где η_{fy} — эластичность спроса на реальные денежные средства по доходу;

g — темп роста реального ВВП;

$\eta_{f\pi}$ — эластичность спроса на реальные денежные запасы по темпу инфляции;

g_π — темп изменения темпов инфляции.

Подставляя формулы (10.15) в уравнение (10.14), получаем балансовое уравнение:

$$n + \pi + \eta_{fy} g + \eta_{f\pi} g_\pi = m, \tag{10.16}$$

где $n = N'/N$ — темп роста населения.

При неизменности темпа инфляции ($g_\pi = 0$) получим из (10.16):

$$m = n + \pi + \eta_{fy} g. \tag{10.17}$$

Найдем теперь темп инфляции, при котором реальные доходы государства от сеньоража R_s достигают максимума

$$R_s = mz \to \max_\pi \tag{10.18}$$

Подставляя в (10.18) выражение для m из (10.17), получаем:

$$R_s = mz = Nf(y, \pi)(n + \pi + \eta_{fy} g). \tag{10.19}$$

Дифференцируя выражение (10.19) по π, получаем условие максимума согласно (10.18):

$$\begin{gathered} \frac{dR_s}{d\pi} = Nf(y, \pi)\left(1 + g\frac{d\eta_{fy}}{d\pi}\right) + \\ + N(n + \pi + \eta_{fy} g)\frac{df(y, \pi)}{d\pi} = 0. \end{gathered} \tag{10.20}$$

При отсутствии экономического роста ($g = n = 0$) из (10.20) получаем после несложных преобразований:

$$\frac{df}{d\pi}\frac{\pi}{f} = \eta_{f\pi} = -1. \tag{10.21}$$

Условие (10.21) означает, что при экономической стагнации максимальная величина сеньоража достигается при таком темпе инфляции, когда эластичность спроса на деньги по темпу инфляции равна –1. Этот вывод совпадает с известным положением макроэкономической теории о том, что выручка монополиста является максимальной при цене, для которой ценовая эластичность спроса равна –1.

Покажем, что в случае роста экономики (g и/или n положительны) величина темпа инфляции, при котором достигается максимум сеньоража, будет ниже, чем в предыдущем случае. После преобразования (10.20) получаем:

$$g\frac{d\eta_{fy}}{d\pi}+(n+\pi+\eta_{fy}g)\frac{df}{d\pi}\frac{1}{f}=-1. \qquad (10.22)$$

В случае когда эластичность по доходу реального спроса на деньги не зависит от темпа инфляции ($d\eta_{fy}/d\pi = 0$), максимум доходов государства от сеньоража достигается при выполнении условия

$$(n+\pi+\eta_{fy}g)\frac{df}{d\pi}\frac{1}{f}=-1. \qquad (10.23)$$

В левой части этой формулы $\eta_{fy} > 0$ и $df/d\pi < 0$ — это следует из определения определения функции спроса индивида на деньги (10.11), а $n \geq 0$, $g \geq 0$ — по условию. Сравнивая (10.22) и (10.23), получаем, что при неизменности величины $(df/d\pi)/f$ условие (10.23) выполняется при меньшем значении π по сравнению с условием (10.21).

Таким образом, при положительном темпе экономического роста возможности извлечения реального сеньоража ниже, нежели при отсутствии экономического роста. Во втором случае целесообразность сеньоража зависит от соотношения фактического π и оптимального π^* (при котором выполняется условие (10.21)) темпов инфляции. Если фактический темп инфляции ниже оптимального, то увеличение денежной массы приведет к росту дохода государства от сеньоража; если он выше, то политика увеличения темпов прироста денежной массы не имеет смысла.

10.5. Гиперинфляция

Инфляция является одним из основных дестабилизирующих факторов рыночной экономики, причем ее опасность возрастает с ее уровнем. *Гиперинфляция* (критерием ее является несколько десятков или сотен процентов в год) означает крах денежной системы и паралич всего рыночного механизма. В разные времена гиперинфляция поражала ряд европейских стран: Германию (после обеих мировых войн), Венгрию, Россию (1917–1920 и 1992–1995 гг.) и др. Формальный критерий гиперинфляции был введен американским экономистом Филиппом Каганом; он предложил считать началом гиперинфляции месяц, в котором рост цен впервые превышает 50%, а ее концом — месяц, предшествующий тому, в котором рост цен падает ниже этой критической отметки и не достигает ее вновь по крайней мере в течение года.

Обычной мерой борьбы с растущей инфляцией является ограничение темпов роста денежной массы. Однако в экономике бывают ситуации, когда несмотря на стабилизацию темпов роста денежной массы сохраняется высокий уровень инфляции. Такой сценарий описывается при помощи модели Кагана, которую мы здесь приводим.

Как и в случае модели Фридмана, сначала укажем основные предпосылки модели.

1. Функция спроса на деньги имеет вид

$$(M/P)_D = F(\pi^e) = \exp(-\alpha\pi^e), \tag{10.24}$$

где $\alpha > 0$ — параметр, характеризующий эластичность спроса на деньги по темпу инфляции $\alpha\pi^e$.

2. Темп прироста денежной массы полагается постоянным

$$(M'/M) = m = \theta = \text{const.} \tag{10.25}$$

3. Вводится правило пересмотра ожиданий, задаваемое уравнением

$$\frac{d\pi^e}{dt} = \beta(\pi - \pi^e), \ \ \beta > 0, \tag{10.26}$$

т. е. предполагается, что ожидания адаптивны. Если реальный темп инфляции π более высок, чем ожидаемый экономическими агентами π^e, то они корректируют свои ожидания на будущее в сторону увеличения инфляции $(\pi^e)' > 0$, и наоборот, если $\pi - \pi^e < 0$, то $(\pi^e)' < 0$. Из формулы (10.26) следует, что параметр β является показателем скорости пересмотра ожиданий экономических агентов. Вообще говоря, здесь следует различать короткопериодные и длиннопериодные ожидания и, соответственно, учитывать это в модели регулированием параметра β.

Условие равновесия на денежном рынке $(M/P)_D = (M/P)_S$ с учетом (10.24) имеет вид:

$$\exp(-\alpha\pi^e) = M/P. \tag{10.27}$$

Логарифмируя это тождество, получаем

$$-\alpha\pi^e = \ln M - \ln P.$$

Дифференцирование этого выражения по времени приводит к уравнению в темпах роста

$$-(\alpha\pi^{e})' = \theta - \pi. \qquad (10.28)$$

Отсюда с учетом (10.26) получаем выражение для темпа инфляции

$$\pi = \frac{(\theta - \alpha\beta\pi^{e})}{1-\alpha\beta}. \qquad (10.29)$$

Дифференцируя по времени это выражение, с учетом (10.28), получаем обыкновенное линейное дифференциальное уравнение первого порядка для темпа инфляции

$$\pi' = \frac{\beta(\theta - \pi)}{1-\alpha\beta}.$$

Решение этого уравнения имеет вид:

$$\pi(t) = \theta + (\pi(0) - \theta)\cdot \exp\left(-\frac{\beta t}{1-\alpha\beta}\right). \qquad (10.30)$$

При анализе экономики с высокими темпами инфляции можно полагать $\pi(0) > \theta$. Из формулы (10.30) видно, что если $\alpha\beta < 1$, то θ является стационарным решением: $\pi(t) \to \theta$ при $t \to \infty$. Это означает, что при относительно небольших значениях параметров эластичности спроса на деньги по темпу инфляции (α) и скорости пересмотра инфляционных ожиданий (β) результат модели Кагана согласуется с положением количественной теории денег — в состоянии равновесия темпы прироста денежной массы и инфляции равны: $\pi = m = \theta$.

Если $\alpha\beta > 1$, т. е. агенты заметно (сильно) меняют спрос на деньги при пересмотре ожиданий или резко меняют свои ожидания, экономика уходит от состояния равновесия с резким ростом темпа инфляции: $\pi(t) \to \infty$ при $t \to \infty$. В первом случае ($\alpha >> 1$) при росте инфляционных ожиданий резко снижается спрос на деньги, что ведет к усилению инфляции. Во втором случае ($\beta >> 1$) резкий пересмотр ожиданий также приводит к усилению инфляционных процессов. В обоих случаях необходимо предпринять мероприятия, направленные на снижение этих факторов.

Следует отметить, что модель Кагана не учитывает влияние динамики ВВП на равновесие. Безусловно, это снижает область применимости модели, так что прогнозы с ее применением являются скорее качественными. Тем не менее выводы модели представляются важными с общетеоретических позиций.

10.6. Смешанное финансирование дефицита государственного бюджета

Более реалистичным является предположение, что государство использует в качестве источников финансирования бюджетного дефицита как денежную эмиссию, так и заимствования.

Рассмотрим модель Бруно–Фишера, в которой бюджетный дефицит $G - T$ покрывается за счет денежной эмиссии M'/P и увеличения государственного долга B', т. е. бюджетное ограничение государства имеет вид балансового соотношения:

$$M'/P + B' - rB = G - T = dY, \tag{10.31}$$

где B — величина реального государственного долга;
r — реальная ставка процента;
G — государственные расходы;
T — налоговые поступления;
d — доля бюджетного дефицита в ВВП;
Y — объем ВВП.

Пусть $V = B + M/P$ — сбережения потребителей (богатство), состоящие из двух активов: запаса государственных облигаций B и реального запаса наличных денег M/P. Тогда спрос экономических агентов на деньги в нормированной по ВВП форме задается уравнением

$$\left(\frac{M}{PY}\right)_D = \nu \cdot \exp[-\alpha(r + \pi^e)], \tag{10.32}$$

где $\nu = V/Y$ — относительный объем сбережений, $r + \pi^e = i$ — номинальная процентная ставка.

Рассмотрим случай, когда инвестиционный спрос является частью потребительского спроса, т. е.

$$Y = C + G. \tag{10.33}$$

Предположим, что частное потребление C прямо пропорционально величине богатства V, обратно пропорционально ставке процента r, а также снижается с ростом налогов T:

$$C = V/r^\gamma - cT, \gamma > 0, c > 0, \tag{10.34}$$

где γ — параметр, характеризующий эластичность сбережений по процентной ставке. Подстановка соотношения (10.24) в (10.33) приводит к нормированному по Y уравнению равновесия

$$\nu r^{-\gamma} - \frac{T}{Y} + \frac{G}{Y} = 1.$$

Из этого уравнения следует, что относительная величина богатства является функцией, возрастающей по процентной ставке и относительной ставке налогов $\nu = T/Y$ и убывающей по доле государственных расходов $\xi = G/Y$:

$$\nu = \nu\,(r, \xi, t) = (1 - ct - \xi)r^{\gamma}. \tag{10.35}$$

Для того чтобы учесть динамику народонаселения, в правую часть бюджетного ограничения государства (10.31) следует добавить слагаемое, соответствующее совпадению темпа роста народонаселения n (см. п. 10.3) и выпуска, а именно nB. Тогда в нормированных относительно ВВП величинах (см. раздел 10.4) уравнение (10.31) можно представить в виде:

$$\theta z + b' + nb = d + rb, \tag{10.36}$$

где z — доля реальных денежных средств относительно ВВП, $b = B/Y$.

В состоянии равновесия $b' = 0$. Кроме того, при постоянных темпе инфляции и ВВП имеем $\theta = \pi + n$ (это следует из формулы (10.16) при $g = 0$ и $\pi\ g_{\pi} = 0$). Поскольку $b = \nu - z$ (что следует из определения V), получаем из уравнения (10.36):

$$(\pi + r)z = d + \nu\,(r - n). \tag{10.37}$$

Представляет интерес проанализировать взаимосвязь между процентной ставкой r и темпом инфляции π. После некоторых преобразований с учетом формул (10.32), (10.35) и (10.37) получаем выражение для производной

$$\frac{dr}{d\pi} = \frac{z\,[1 - \alpha\,(\pi + r)]}{b + \alpha i z - d\gamma/r}. \tag{10.38}$$

Знак числителя правой части (10.38) неотрицателен при $\pi \le 1/\alpha - r$ и неположителен при $\pi \ge 1/\alpha - r$. Знак знаменателя зависит от величины γ эластичности сбережений по процентной ставке. Обозначим значение γ, при котором знаменатель равен нулю: $\gamma_* = r(b + \alpha iz)/d$. Если параметр $\gamma < \gamma_*$, то знаменатель в правой части (10.38) положителен, и тогда производная (10.38) меняет в точке $\pi_{\text{extr}} = 1/\alpha - r$ знак с плюса на минус; график функции $r(\pi)$ для этого случая показан на рис. 10.3. Если же эластичность сбережений по ставке процента достаточно велика ($\gamma > \gamma_*$), то знаменатель правой части (10.38) отрицателен, и тогда в точке π_{extr} график функции $r(\pi)$ имеет минимум (рис. 10.4).

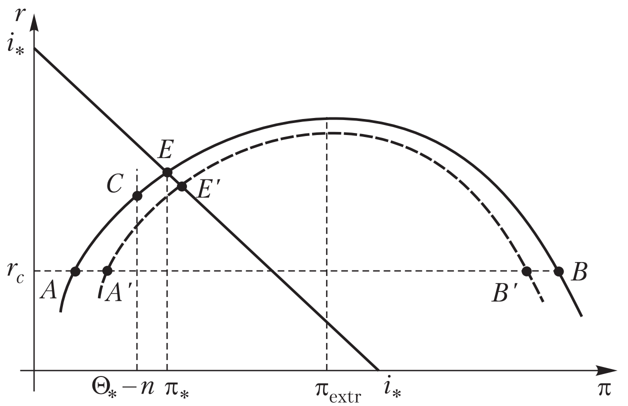


Рис. 10.3

С помощью приведенных выше рисунков рассмотрим три стратегии государства по финансированию бюджетного дефицита.

1. Цель государства состоит в поддержании процентной ставки на некотором постоянном уровне r_c. Это означает, что правительство будет размещать на рынке такой объем государственных облигаций, чтобы реальную ставку процента сохранить на уровне r_c, а оставшийся бюджетный дефицит покрывать за счет денежной эмиссии. На рис. 10.3 и 10.4 этому варианту кредитно-денежной политики соответствует прямая $r = r_c$, и здесь возможны два равновесных варианта (точки A и B). Ограничения на r_c, соответственно обоим случаям величины эластичности сбережений по процентной ставке, будут следующими: $r_c \le r(\pi_{\text{extr}})$ и $r_c \ge r(\pi_{\text{extr}})$.

2. Государство поддерживает постоянный темп роста денежной массы θ_* с финансированием оставшегося дефицита при помощи государственных облигаций. Графически этот вариант кредитно-денежной политики представляется вертикальной прямой $\pi = \theta_* - n$. В таком слу-

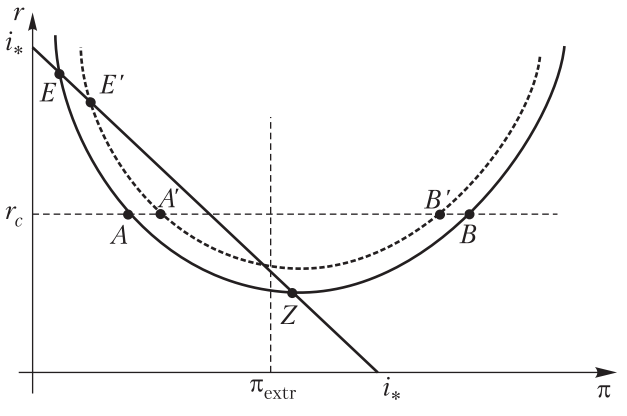


Рис. 10.4

чае в экономике будет иметь место единственное равновесие, соответствующее точке C для обоих случаев состояния равновесия (как для относительно низкой, так и для относительно высокой эластичности сбережений по процентной ставке).

3. Центральный банк поддерживает постоянную номинальную ставку процента i_*. В этом случае при низком значении γ существует одно равновесие (рис. 10.3, точка E), а при относительно высоком значении π существуют две точки равновесия (рис. 10.4, точки E и Z) — как точки пересечения графика функции $r = r(\pi)$ и прямой $\pi + r = i_*$.

Во всех рассмотренных случаях последствия увеличения дефицита государственного бюджета зависит от того, являются ли устойчивыми полученные равновесные состояния. Рост дефицита государственного бюджета (величины d) вызовет сдвиг кривой $r = r(\pi)$ вниз на рис. 10.3 и вверх на рис. 10.4. При относительно невысоком значении $\gamma < \gamma_*$ увеличение бюджетного дефицита вызовет рост инфляции, если экономика находилась в точках равновесия A или E, и падение ее, если экономика находилась в равновесии в точке B. В случае $\gamma > \gamma_*$, при увеличении бюджетного дефицита произойдет увеличение темпа инфляции для состояний равновесия экономики в точках A или E; для точек равновесия B и Z наступит падение инфляции (на рисунках сдвинутые точки помечены штрихом).

Анализ устойчивости точек равновесия является достаточно сложным. Он сводится к исследованию системы автономных нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка относительно ожидаемого темпа инфляции и процентной ставки

$$\begin{cases} \dfrac{d\pi^e}{dr} = F(\alpha, \beta, \gamma, \theta, n, \nu, r, z, d, \pi^e). \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{dr}{dt} = \Phi(\alpha, \beta, \gamma, \theta, n, \nu, r, z, d, \pi^n). \end{cases} \tag{10.39}$$

где F и Φ — некоторые функции параметров модели, при условии адаптивного ожидания (10.26). Не приводя этот анализ, отметим здесь лишь некоторые его результаты.

а) Если произведение $\alpha\beta$ относительно невелико и $r > n$, то при относительно низкой эластичности сбережений по ставке процента единственное равновесие в экономике не будет устойчивым.

б) С повышением γ увеличивается возможность достижения устойчивости единственного состояния равновесия.

Основной вывод модели Бруно–Фишера сводится к следующему: действенность антиинфляционных мер существенно зависит от механизма формирования инфляционных ожиданий в экономике. Возможна ситуация, когда традиционные меры борьбы с инфляцией (например, снижение бюджетного дефицита, стабилизация курса национальной валюты, сдерживание роста денежной массы и т. д.) являются недостаточными. Скажем, снижение бюджетного дефицита и сдерживание роста денежной массы на этапе подъема экономики могут сдерживать темп ее развития. Не исключены меры, направленные на снижение инфляционных ожиданий экономических агентов (снижение параметров α и β), такие как замораживание заработной платы и контроль цен.

В целом из анализа причин возникновения инфляции следует, что ее сдерживанию способствуют скоординированные действия правительства и частного сектора. Правительству следует придерживаться ряда мер: в области фискальной политики — стабилизировать государственные расходы и систему налогообложения, в области денежной политики — стремиться к соблюдению баланса между темпами роста денежной массы и роста производства, в области валютной политики — не допускать импорта инфляции. Предпринимателям следует придерживаться соблюдения равенства темпов роста ставки заработной платы и темпов роста производительности труда.

Следует отметить, что важнейшим социально-экономическим следствием инфляции является перераспределение доходов и имущества между населением и государством, а также между различными слоями населения. Высокий уровень инфляции приводит к резкой стратификации населения и увеличению его поляризации по социальному признаку — т. е. к снижению численности среднего класса за счет роста численности тех, кто находится за чертой бедности, и, в свою очередь, к сужению налогооблагаемой базы. Именно потому выбор между различными вариантами антиинфляционной политики должен осуществляться в зависимости от конкретной социально-экономической ситуации в стране.

Роль модельного ряда в определении выбора антиинфляционной стратегии состоит прежде всего в соответствующих рекомендациях, выработанных на основе «проигрывания» многовариантных сценариев развития и прогноза «отклика» в экономике принимаемых мер по принципу обратной связи. Не исключено, что для серьезных выводов потребуются довольно непростые модельные построения, например, использование иерархии моделей.

10.7. Инфляция как многофакторный процесс

Разумеется, инфляция является многофакторным процессом, причем в разных странах проявление в инфляционном процессе одних и тех же факторов может иметь различную интенсивность. Основные параметры инфляции для России указаны в табл. 10.1.

Таблица 10.1. Характеристики инфляционного процесса в России

Следствия	Основные причины	Основные факторы
Нарушение закона денежного обращения, избыток денег в обороте	Диспропорции в процессе общественного воспроизводства	Финансовые Денежные Производственные
Рост цен, обесценение денег	Экономическая политика	Кредитные Нестабильность банковской системы
Перераспределение национального дохода и национального богатства		Нестабильность фондового рынка Неплатежи. «Долларизация» экономики «Бегство» капитала Бремя внешнего долга Теневая экономика Коррупция Неэффективное законодательство Недоверие к национальной валюте

Как уже говорилось выше, некоторые факторы являются сугубо специфическими для условий конкретной страны. Так, для России особо значимыми являются неплатежи, «долларизация» экономики, теневая экономика, неэффективное законодательство, недоверие к национальной валюте.

Указанные в табл. 10.1 внешние факторы (последняя колонка) могут быть учтены при помощи теоретических и/или эмпирических соотношений в моделях инфляции, с тем чтобы выявить степень «отклика» на них проявлений инфляционного процесса (первая колонка). Если анализируются или «проигрываются» определенные сценарии экономики, то эти соотношения, как правило, имеют вид установленных статистических зависимостей — регрессионных уравнений.

Следует отметить, что не все главные факторы в табл. 10.1 являются независимыми. Например, нестабильность банковской системы следует увязывать с неплатежами, «долларизацию» экономики — с недоверием к национальной валюте, а «бегство» капитала — с теневой экономикой и неэффективным законодательством.

При моделировании динамики инфляционных процессов требуется учитывать как общий характер изменения инфляции на всем рассматриваемом периоде, так и особенности каждого из периодов. Особенно это важно при прогнозе изменения индекса цен, поскольку преобладание разных факторов в разные периоды может приводить к смещению оценок соответствующего регрессионного уравнения и ухудшению его прогнозных качеств.

При моделировании динамики ИПЦ рассматриваются следующие основные гипотезы.

1. Темпы прироста уровня цен в краткосрочном периоде обладают инерционностью либо имеют очевидный временной тренд. Первое означает наличие устойчивой зависимости текущих значений ИПЦ от их предыдущих значений темпов роста, второе предполагает очевидную тенденцию к снижению или росту при случайном характере колебаний.

2. При оценке будущей инфляции экономические агенты пользуются преимущественно адаптивными ожиданиями.

3. В долгосрочном периоде инфляционные процессы определяются в основном динамикой денежных агрегатов M_0 и M_2 (широкими деньгами) и колебаниями спроса на реальные кассовые остатки.

Спецификацию уравнения, описывающего динамику темпов прироста индекса потребительских цен p_t, можно использовать в следующем достаточно общем виде:

$$p_t = c + a_1 f(t) + a_2 \cdot g(m) + \varepsilon_t, \tag{10.40}$$

где c — свободный член;

$f(t)$ — функция времени или смещенных во времени показателей инфляции;

$g(m)$ — функция прошлых темпов прироста денежного агрегата;

a_1 и a_2 — коэффициенты регрессии;

ε_t — случайная ошибка.

В данной зависимости второй член в правой части характеризует инерционность инфляционных процессов, наличие временного тренда или адаптивный характер ожидания экономических агентов. Третье слагаемое отражает монетарную составляющую инфляции — влияние темпов прироста номинальных денежных агрегатов на уровень цен в экономике.

Регрессионные уравнения вида (10.40) при надлежащей формализации могут быть построены практически для всех факторов, приведенных в табл. 10.1.

Приведем теперь реализации проверок гипотез 1–3.

1. *Инерционность цен.*

Гипотеза предполагает, что динамика инфляционных процессов в значительной степени определяется инфляцией в прошлом, либо определяется наличием устойчивого тренда на всем периоде. Проверка гипотезы включает в себя анализ автокорреляционной и частной автокорреляционной функций ряда темпов прироста ИПЦ, тест Дики–Фулера ряда темпов на единичные корни и оценку регрессий вида

$$p_t = c + a_1 f(t) + \varepsilon_t. \tag{10.41}$$

Для определения наилучшего показателя инерционности инфляции оцениваются три вида зависимостей:

- уравнение авторегрессии первого порядка

$$p_t = c + a_1 p_{t-1} + \varepsilon_t; \tag{10.42}$$

- линейный временной тренд

$$p_t = c + a_1 t + \varepsilon_t; \tag{10.43}$$

- логарифмический временной тренд

$$p_t = c + a_1 \ln t + \varepsilon_t. \qquad (10.44)$$

Оценка указанных регрессий и выбор наилучшей из них проводится по t-статистикам для a_1 и коэффициенту детерминации R^2.

2. *Ожидания экономических агентов.*

В этом случае текущая инфляция в значительной мере определяется прошлыми значениями темпов прироста цен. Естественно предположить, что ожидания опираются на динамику инфляции за несколько прошедших месяцев. Обычно глубина лага принимается в несколько месяцев и не превышает 12. Моделирование ожиданий можно проводить с использованием распределенных лагов различного вида. Укажем наиболее употребимые из них.

а) Полиномиальный распределенный лаг

$$p_t = c + \sum_{i=1}^{n} a_i w_i p_{t-i} + \varepsilon_t, \quad w_i = \sum_{k=1}^{m} b_k i^k, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \qquad (10.45)$$

где n — глубина лага в месяцах;

w_i — весовые коэффициенты;

m — степень полинома (выбирается с учетом количества наблюдений и необходимого числа степеней свободы).

б) лаг с линейно убывающими степенями — когда в (10.45) весовые коэффициенты w_i линейно убывают от единицы с равномерным шагом $1/n$

$$p_t = c + \sum_{i=1}^{n} a_i [1 - (i-1)/n] p_{t-1} + \varepsilon_t. \qquad (10.46)$$

в) Лаг с гиперболически убывающими весами

$$p_t = c + \sum_{i=1}^{n-1} a_1 (1/(i+1)) p_{t-1} + \varepsilon_t. \qquad (10.47)$$

г) Лаг с выбранными убывающими весами для отдельных месяцев.

3. *Влияние различных денежных агрегатов.*

В исследовании влияния темпов прироста денежной массы на темпы прироста цен содержится два аспекта. Во-первых, необходимо определить какой из денежных агрегатов (см. параграф 10.1) — денежная масса M_0, денежная масса M_1, денежная масса M_2, широкие деньги — больше всего влияет на темпы инфляции. Во-вторых, требуется выявить глубину влияния изменения объема номинальной денежной массы на текущий уровень цен.

Расчет средних темпов прироста денежной массы за n месяцев производится по формуле:

$$Mi_{t,\,t-n} = (Mi_t / Mi_{t-n}) - 1, \tag{10.48}$$

где Mi — вид денежной массы. Затем исследуется парная корреляция темпов прироста потребительских цен и денежных агрегатов (с заданным уровнем значимости, см. гл. 5) с использованием регрессионного уравнения вида

$$p_t = c + a_1 p_{t-1} + a_2 Mi_{t,\,t-2} + \varepsilon_t. \tag{10.49}$$

Зависимость (10.49) может быть использована для исследования парной корреляции на различных периодах с различной глубиной осреднения n.

Глава 11

Модели эколого-экономических систем

Связь социального и экономического впервые стала изучаться в рамках классической политэкономии Кэне–Смита–Рикардо. Однако в конце XIX в., после «революции Вальраса» и появления «неоклассической» политэкономии, был выдвинут принцип «чистой экономии» как науки. Основное внимание уделялось вопросам рынка, эволюции цен, движения капитала и пр. До сих пор вокруг этих проблем сосредоточены основные усилия исследователей, они служат основой для создания математических моделей и новых математических методов, создан разнообразный и эффективный инструментарий, позволяющий решать многочисленные и важные задачи.

Однако оказалось, что практическое решение задач оптимизации, эффективное на короткие периоды времени в микроэкономическом масштабе, приводит к существенным затратам в макроэкономическом плане в силу возрастания эффекта накопления техногенного воздействия на окружающую среду. Масштабы этого воздействия уже с середины XX столетия стали приближаться к планетарным.

В семидесятых годах XX столетия становится очевидным, что подобные подходы не могут обеспечить количественный анализ перспектив экономического развития и оценку альтернативных вариантов целенаправленных международных действий, а также решение сложных проблем взаимодействия человечества и окружающей среды. Начало новым подходам положил Дж. Форрестер; в его фундаментальной работе «Мировая динамика» с целью описания глобального экологического процесса впервые оказались «завязанными» в одну математическую модель процессы развития экономики, демографии и загрязнения окружающей среды. Новый аспект был развит в работах Д. Медоуза, Н. Н. Моисеева и других исследователей. Важным результатом этой деятельности явилось осознание того, что существуют глобальные проблемы кризисного характера, в которых экономика неотделима от экологии. В условиях глобализации мировой экономики обеспечение жизнедеятельности мирового сообщества в планетарных масштабах становится главной задачей, носящей глобальный характер. Именно это обстоятельство обусловливает новый концептуальный подход — переход от понятия экономической системы к понятию эколого-экономической системы. Естественно, что в рамках такого подхода возникают новые специфические задачи и модели.

11.1. Эколого-экономические системы

11.1.1. Основные аспекты взаимодействия человека и окружающей среды

В многовековом процессе эволюции человека нагрузка на биосферу, как результат его производственной деятельности, неуклонно возрастала. Еще на заре цивилизации увеличение масштабов деятельности людей приводило к необратимым изменениям в окружающей среде. Так, в Китае, например, огромные площади рисовых полей совершенно изменили природные ландшафты, вытеснили существовавшую ранее фауну и флору и привели к новым климатическим условиям на больших территориях. Известный российский ученый академик В. И. Вернадский в начале 30-х гг. XX в. ввел специальный термин «ноосфера», обозначающий среду обитания сообщества людей, переделанную под их нужды и существенно отличающуюся от природных условий. По сути дела к ноосфере можно отнести все масштабные изменения в природной обстановке, обусловленные производственной активностью человечества: мегаполисы, сельское хозяйство, добычу природных ресурсов, техногенные воздействия на биосферу при освоении новых территорий.

Ресурсная экосистема поддерживает функционирование биосферы и цивилизации на нашей планете. Все ее ресурсы можно условно разделить на *возобновимые* и *невозобновимые*. Различие между ними состоит в длительности периодов их восстановления; если для первой группы ресурсов период восстановления сравнительно невелик (десятки лет), то для второй группы он превышает 1000 лет.

Масштабы деятельности людей стали уже планетарными, что требует создания нового класса моделей развития с целью выработки рекомендаций по координации экономической активности государств для сохранения условий жизни на нашей планете, а, следовательно, и успешного развития мировой экономики. Здесь необходимо рассмотреть основные аспекты проблемы.

1. *Энергетический аспект*. Вместе с ростом производительности труда, совершенствованием технологий и повышением квалификации технологический уклад прошлых лет характеризовался все возрастающей энергоемкостью производства. В прошлые века это было оправдано, поскольку происходил переход от малопродуктивной системы производства к высокопродуктивной системе. Основной вклад в развитие производительности труда дала энергетика, именно она развивалась опережающими темпами. Особенно наглядно это видно в развитии сельского хозяйства; в середине XX в. средняя урожайность зерновых в развитых странах возросла в три раза в результате роста энергозатрат на производство одной тонны зерна почти на два порядка. Однако в последнее время появились новые формы деятельности и технологии, требующие значительно меньших затрат энергии: микроэлектроника, биотехнологии, робототехника. Происходит совершенствование современных технологий прежде всего в направлении уменьшения энергозатрат. Эта тенденция проявляется прежде всего в том, что энергоемкие производства перемещаются из экономически развитых стран в развивающиеся страны, иными словами, энергоемкость становится одной из важнейших характеристик производства. Кроме того, в развивающихся странах значительно дешевле рабочая сила, а также дешевле практически все: аренда, земля, электричество. Поэтому туда и перемещают производства, а также для того, чтобы не тратить свои энергоресурсы.

2. *Проблема замкнутых технологий*. Производственную деятельность людей можно рассматривать как глобальный технологический процесс обеспечения цивилизации всем необходимым. В последние столетия эта технология стала принципиально незамкнутой: она не может существовать без использования невозобновимых запасов земных недр. Имеет место не только истощение ископаемых природных ресурсов, но и нехватка возобновимых ресурсов, например пресной воды. Именно поэтому во всех странах с развитой экономикой предпринимаются значительные усилия для создания и использования замкнутых технологий, использующих возобновимые ресурсы, в том числе и энергетические.

3. *Аспект загрязнений*. Из экономически развитых стран идет выталкивание в развивающиеся страны не только энергоемких технологий, но и производств с большими загрязнениями биосферы. К ним относятся,

например, добыча невозобновимых природных ресурсов, черная металлургия, некоторые виды химического производства. Именно с этим связан большой рост экспорта из развивающихся стран сырья и металлов. Кроме того, наблюдается тенденция выталкивания и отходов высотехнологичных производств передовых стран в развивающиеся страны — например, вывоз радиоактивных отходов. Однако этот процесс представляется опасным прежде всего тем, что он увеличивает разрыв между передовыми странами и развивающимися странами не только в технологическом плане, но и в плане уровня жизни населения и увеличения глобальной опасности разрушения биосферы.

4. *Организационный аспект.* Развитие технологий и научно-технический прогресс требуют непрерывного совершенствования организационных структур производственной деятельности, в том числе и на международном уровне. Эти проблемы затрагивают взаимодействие человека и биосферы в глобальном плане. Возникает необходимость учета социальных и экологических факторов и долгосрочных последствий принимаемых решений. Модели, позволяющие описать эти процессы, фактически еще не созданы.

11.1.2. Природоемкость

Важным показателем эффективности функционирования *природно-продуктовой системы* является природоемкость. Он характеризует тип и уровень эколого-экономического развития. На макроуровне показатель природоемкости определяется как затраты используемых природных ресурсов (P) на единицу ВВП:

$$E_N = P/\text{ВВП}. \qquad (11.1)$$

Второй тип показателей природоемкости определяется затратами природного ресурса R_N на единицу конечной продукции объема V, произведенной на основе этого ресурса (на продуктовом или отраслевом уровне):

$$e = R_N/V. \qquad (11.2)$$

В качестве такого показателя может служить *энергоемкость* (энергетические затраты на единицу конечной продукции). Существует важный макроэкономический показатель энергоемкости — количество петаджоулей, затраченных на производство продукции стоимостью в 1 млрд долл. ВНП (1 петаджоуль = 10^{15} джоулей). По этому показателю видна технологическая отсталость России на сегодняшний день: она «опережает» Бразилию, Южную Корею, Англию, Германию, США и Японию соответственно в 3,2; 4,1; 6; 6,8; 4 и 11 раз.

В статистике широко распространен показатель, обратный коэффициенту природоемкости, — показатель *природной ресурсоотдачи*

$$\sigma = V/R_N. \tag{11.3}$$

В сельском хозяйстве его аналогом является урожайность — производство продукции на единицу земельной площади.

Для *экстенсивного* типа развития экономики характерна высокая природоемкость (низкая природная ресурсоотдача). При длительном сохранении технологического уровня это чревато постепенным истощением ресурсов, что еще более обостряет экономическую ситуацию. Для *интенсивного* типа развития экономики характерно снижение природоемкости (повышение природной ресурсоотдачи). В условиях реформ структурной и инвестиционной политики важнейшей задачей государства является минимизация природоемкости или максимизация природной ресурсоотдачи:

$$e \to \min \text{ или } \sigma \to \max. \tag{11.4}$$

11.1.3. Устойчивое развитие

Вопрос об устойчивом развитии впервые был поставлен на международном уровне в докладе Международной комиссии ООН по окружающей среде и развитию в 1987 г. Термин «*устойчивое развитие*» подразумевает следующие закономерности эволюции цивилизации: удовлетворение потребностей настоящего времени, не ставящее под угрозу способность будущих поколений удовлетворять свои потребности; учет социальных и экологических факторов; учет долгосрочных последствий принимаемых решений.

В экономическом плане это означает, что при устойчивом развитии будут соблюдаться условия цивилизованного отношения между настоящим и будущим:

- на последующие поколения не возлагаются дополнительные затраты;
- отрицательные внешние эффекты между поколениями сводятся к минимуму;
- обеспечивается простое и/или расширенное воспроизводство производственного потенциала на перспективу;
- обеспечивается жизнь человечества на проценты с природного капитала.

Здесь следует отметить, что уменьшение природоемкости является необходимым условием для перехода к устойчивому развитию для отдельных стран и для мировой экономики в целом. Движение по траектории устойчивого развития подразумевает прежде всего снижение потребления природных ресурсов за счет использования новых и совершенствования функционирующих производственных технологий.

Целевыми ориентирами устойчивого развития являются качество жизни, уровень экономического развития, экологическая стабильность.

Естественным образом встает вопрос о мерах по обеспечению устойчивого развития. Поэтому возникла *концепция критического природного капитала* как необходимых для жизни природных благ, которые невозможно заменить искусственным путем. К ним относятся: ландшафты, редкие виды флоры и фауны, озоновый слой в верхней части земной атмосферы, глобальный климат и т. д. Этот критический природный капитал необходимо сохранять при любых сценариях экономического развития. Остальная часть природного капитала может быть заменена искусственным путем — прежде всего имеются в виду возобновимые и некоторая часть невозобновимых природных ресурсов (например, природные энергоресурсы могут быть заменены на солнечную энергию, одного процента которой с избытком хватило бы на обеспечение современной потребности человечества).

С учетом критического природного капитала N^* устойчивое развитие может быть дополнено ограничением на исчерпание во времени этой величины. Для неубывающей во времени производственной функции, аргументами которой являются агрегированные переменные труда L, капитала K и природного ресурса N

$$F_t(K,\ L,\ N)\ \leq\ F_{t+1}(K,\ L,\ N) \tag{11.5}$$

необходимо соблюдение условия неубывания во времени величины N^*

$$N_t^* \leq N_{t+1}^*, \tag{11.6}$$

а также условие частичной замены природного капитала N на искусственный N^s (или невозобновимого ресурса на возобновимый ресурс)

$$N_t = N_t^* + N_t^s. \tag{11.7}$$

11.1.4. Основные виды загрязнений

Можно сказать, что отходы производства — это загрязнение окружающей среды при незамкнутом производственном цикле. XX в. охарактеризовался еще и ядерными отходами с большим жизненным циклом. В природный круговорот оказались активно включены инородные для природы компоненты – продукты антропогена, что приводит к значительным и подчас необратимым изменениям в биосфере. Число видов этих загрязнений велико, и здесь мы укажем основные из них.

1. Прежде всего – это загрязнения атмосферы. К ним относятся хлорфторуглеводороды, выбросы углекислого газа, сернистых и азотнокислых соединений. Поднимаясь в верхние слои атмосферы Земли, они вызывают процессы, отрицательно воздействующие на естественные природные циклы биосферы. Наиболее опасным следует признать разрушение озонового слоя в стратосфере, являющегося природным экраном от губительного «жесткого» излучения Солнца в диапазоне *R*-спектра.

2. Разработка и использование природных ресурсов переводит потребляемые ресурсы в потраченные (истощенные), которые являются отходами производства. Наиболее массовые из них – это отходы черной и цветной металлургии и зола ТЭЦ (соответственно 45,2 и 39,2% от общего объема отходов в России). Крупные по масштабам загрязнения имеют место при разработке и использовании углеводородов.

   Отходы сельского хозяйства представляют собой в основном биозагрязнения и загрязнения от использования химикатов.

3. Сравнительно небольшие по объему, но особо опасные по воздействию на окружающую среду отходы, связанные с употреблением химических технологий: выбросы тяжелых металлов, смесей, растворов, излучений.

Указанные в п. 2 и 3 загрязнения воздействуют на почвенный слой и источники воды (в том числе и подземные), оказывая при больших масштабах губительное воздействие на окружающую среду.

11.2. Балансовые модели

11.2.1. Модель оптимизации выпуска

Приведем задачу оптимизации производства при условиях выполнения условий сосуществования с окружающей средой (выполнения определенных экологических норм).

Пусть $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ — целевая функция выпуска, характеризующая производство, использующее n ресурсов. Будем полагать, что имеется m видов загрязнения от данного производства, которые задары матрицей интенсивностей загрязнений

$$C_p = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{m1} & C_{m2} & \dots & C_{mn} \end{pmatrix}, \tag{11.8}$$

где $c_{ij} \geq 0$ — количество j-го загрязнения, продуцируемое при использовании единицы i-го ресурса. Тогда вектор загрязнений $\bar{z}$ определяется формулой

$$\bar{z}^T = C_p \bar{x}^T \text{ или } z_k = \sum_{j=1}^{n} c_{kj} x_j, \quad k = 1, 2, \dots, m. \tag{11.9}$$

где $\bar{x}$ — вектор-строка используемых ресурсов. Введем матрицу A коэффициентов ограничений на ресурсы, и вектор ограничений $\bar{b}$, определяемый возможностями производства. В рассмотрение необходимо ввести также вектор экологических нормативов $\bar{z}^*$ — допустимых (предельных) отходов по каждому виду загрязнения. Эти нормативы обычно устанавливаются по существующим нормам ПДК (предельно допустимых концентраций) загрязнений.

Тогда задача оптимизации выпуска продукции формулируется следующим образом: найти максимум функции

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = F(\bar{x}) \to \max \tag{11.10}$$

на допустимом множестве

$$\begin{cases} \bar{x} \geq \bar{0}, \ \bar{z} \geq 0, \\ A\bar{x}^T \leq \bar{b}^T, \\ \bar{z} \leq \bar{z}^*. \end{cases} \tag{11.11}$$

Приведенная постановка задачи оптимизации производства при условии соблюдения экологических норм соответствует устойчивому развитию. В отличие от традиционных оптимизационных моделей, допустимое множество которых формируется только двумя первыми производственными соотношениями (11.11), эта модель включает еще и ограничение на «чистоту» производства. Для соблюдения последнего условия в (11.11), которое в развернутой форме, согласно (11.9), имеет вид ограничения по каждому типу загрязнения

$$\sum_{j=1}^{n} c_{kj} x_j \le z_k^*, \ \ k = 1, 2, \ldots, m, \qquad (11.12)$$

необходимо либо делать выбор в сторону более совершенных технологий, либо заменять «грязные» ресурсы на более чистые. В противном случае из-за ограничений (11.12) допустимые объемы используемых ресурсов $\bar{x}$ могут оказаться столь незначительными, что нельзя будет обеспечить экономически приемлемый объем выпуска продукции.

Рисунок 11.1 иллюстрирует сказанное выше. Ограничения (11.12) показаны заштрихованной областью; они, вообще говоря, сокращают допустимое множество решений, на котором ищется оптимальное решение. Следует особо отметить, что вид и размеры этой области зависят от коэффициентов c_{ij}, т. е. от технологии использования ресурсов. При «грязных» технологиях сужение области допустимых решений весьма значительно (рис. 11.1, *а*); применение сберегающих «чистых» технологий незначительно сужает область допустимых решений (рис. 11.1, *б*).

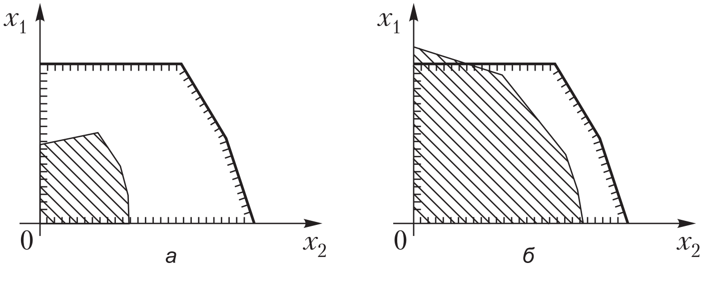


Рис. 11.1

Модель (11.10)–(11.12) относится скорее к области макроэкономики, когда выпуск можно отождествить с ВВП страны или с валовой продукцией региона. Тогда условие (11.12) является управлением технологической политики (быть может – и законодательным). Для микроэкономики на уровне отдельного производства эта модель не будет работать, поскольку производитель заинтересован прежде всего в достижении наибольшего выпуска (11.10), а вопрос о соблюдении экологических норм (11.12) остается для него второстепенным хотя бы потому, что это требование никак не отражено в целевой функции.

11.2.2. Модель оптимизации дохода

Для учета экологического фактора в микроэкономике необходимо перейти к стоимостным выражениям в целевой функции и оплате превышения норм загрязнения. Пусть p — агрегированная цена производимой продукции, а компоненты вектора

$$\overline{w} = (w_1,\ w_2,\ \ldots,\ w_m) \tag{11.13}$$

означают расходы на устранение загрязнений в случае превышения соответствующих норм (при нарушении третьего условия в (11.11)). Тогда функция дохода от выпуска продукции $F(\overline{x})$ имеет вид

$$P = pF(\overline{x}) - \overline{w}\overline{\delta}, \tag{11.14}$$

где $\overline{\delta}$ — вектор «включений» санкций оплаты устранения загрязнений

$$\delta_j = \begin{cases} 0,\ z_j \le z_j^*, \\ 1,\ z_j > z_j^*. \end{cases} \quad j = 1,\ 2,\ \ldots,\ m, \tag{11.15}$$

$\bar{z}$ — вектор загрязнений, определяемый формулами (11.9) и (11.8), а z_j^* — компоненты вектора предельно допустимых загрязнений

$$\bar{z}^* = (z_1^*,\ z_2^*,\ \ldots,\ z_m^*). \tag{11.16}$$

Для простоты будем полагать, что обычные расходы на экологию уже включены в оплату за природопользование — т. е. второй член в функции дохода со знаком минус — это оплата сверхнормативной нагрузки на окружающую среду. В этом плане (11.14) можно рассматривать как производственную функцию, аргументами которой являются ресурсы $\bar{x}$, загрязнения $\bar{z}$, предельно допустимые нормы $\bar{z}^*$ и оплата за нарушение экологических норм $\overline{w}$.

Модель оптимизации дохода от выпуска продукции с использованием вектора ресурсов $\bar{x}$ при технологии, характеризуемой производственной функцией F, определяется следующим образом: найти максимум функции (11.14), (11.15), (11.13) на допустимом множестве решений

$$\begin{cases} \overline{x} \ge \overline{0}, \\ A\overline{x}^T \le \overline{b}^T \end{cases} \tag{11.17}$$

при заданном ограничении (11.16) на вектор $\bar{z}$.

В этой модели присутствуют как возможности самого производства (заданы матрица A коэффициентов ограничений и вектор $\overline{b}$ ограничений на ресурсы), так и нормативы технологического воздействия на окружающую среду и расходы на ликвидацию последствий их превышения (векторы $\overline{w}$ и $\bar{z}^*$). Непосредственно из нее видно, что при «жестком» экологическом законодательстве производитель вынужден будет применять более совершенные технологии с целью снижения удельных техногенных отходов — коэффициентов матрицы C_p в (11.8). Именно так обстоит дело в странах с развитой экономикой.

Модель может быть использована для целей микроэкономики на уровне предприятия, промышленного комплекса, отраслевого выпуска продукции.

11.2.3. Балансовая модель с увеличением расходов ресурсов

Для моделирования эколого-экономических систем в макро- и микроэкономике используются и балансовые модели многоотраслевой экономики. В некоторых из них полагается, что необходимо увеличить валовый выпуск, с тем чтобы прирост выпуска направить на устранение или уменьшение загрязнений в окружающей среде. Однако при такой постановке задачи полагается, что используемые технологии остаются на прежнем уровне, что отражено в неизменности матрицы затрат A.

Как правило, матрицы межотраслевого баланса обладают значительным запасом продуктивности. В ряде случаев для минимизации техногенных отходов приходится тратить больше ресурсов на единицу выпуска продукции, т. е. увеличить внутриотраслевое потребление (например, строительство очистных сооружений, технологическая обработка отходов и т. д.). Это «утяжеляет» коэффициенты матрицы прямых затрат A, что, в свою очередь, приводит к уменьшению ее запаса продуктивности.

Пусть A — матрица межотраслевого баланса, $\bar{x}$ — вектор валовых выпусков отраслей, $\bar{y}$ — вектор конечного потребления. Тогда уравнение межотраслевого баланса имеет вид

$$\bar{x} = A\bar{x} + \bar{y}. \qquad (11.18)$$

Предположим, что для проведения экологических и природоохранных мероприятий нужно увеличить внутриотраслевое потребление, т. е. новая матрица прямых затрат представляет собой сумму прежней матрицы A и некоторой добавки. Соответственно изменятся также и векторы валового выпуска и конечного потребления

$$\tilde{A} = A + \Delta A,\ \ \bar{x}^* = \bar{x} + \Delta\bar{x},\ \ \bar{y}^* = \bar{y} + \Delta\bar{y}. \qquad (11.19)$$

Для измененной матрицы $\tilde{A}$ уравнение межотраслевого баланса (11.18) имеет вид

$$\bar{x} + \Delta\bar{x} = (A + \Delta A)(\bar{x} + \Delta\bar{x}) + \bar{y} + \Delta\bar{y}.$$

После приведения подобных с учетом равенства (11.18) получаем уравнение для изменения вектора валовых выпусков

$$(E - \tilde{A})\Delta\bar{x} = \Delta A\bar{x} + \Delta\bar{y}. \qquad (11.20)$$

Рассмотрим частный случай изменения матрицы A, когда все ее элементы увеличиваются в $(1 + \alpha)$ раз, причем α удовлетворяет условию запаса продуктивности A (матрица $(1 + \alpha)A$ также является продуктивной). Иными словами, $\Delta A = \alpha A$, и тогда уравнение (11.20) с учетом равенства (11.18) принимает вид

$$(E - (1 + \alpha)A)\Delta\bar{x} = \alpha(\bar{x} - \bar{y}) + \Delta\bar{y}. \qquad (11.21)$$

Это уравнение связывает изменения валовых выпусков с изменениями расхода ресурсов и вектора конечного потребления. Из него получаем выражение для $\Delta\bar{x}$:

$$\Delta\bar{x} = (E - (1 + \alpha)A)^{-1}(\alpha(\bar{x} - \bar{y}) + \Delta\bar{y}). \qquad (11.22)$$

Проанализируем выражение (11.22). Так как в силу второго критерия продуктивности матрицы $(1 + \alpha)A$ матрица $(E - (1 + \alpha)A)^{-1}$ является положительной, то даже в случае нулевого прироста вектора конечного потребления валовый выпуск продукции увеличивается, поскольку $\bar{x} - \bar{y} > \bar{0}$.

Пример 1. Найти увеличение валового выпуска для случая двух отраслей с матрицей прямых затрат и неизменным вектором конечного потребления

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}5 \\ 0{,}4 & 0{,}3 \end{pmatrix}, \quad \bar{y} = \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \end{pmatrix},$$

если для соблюдения нормативов загрязняющих отходов необходимо увеличить внутриотраслевое потребление на 10% в каждой отрасли.

Решение. Сначала из уравнения (11.18) рассчитаем исходный вектор валовых выпусков:

$$\bar{x} = (E - A)^{-1}\bar{y} = \begin{pmatrix} 0,7 & -0,5 \\ -0,4 & 0,7 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 20 \\ 10 \end{pmatrix} = \frac{1}{0,29}\begin{pmatrix} 0,7 & 0,5 \\ 0,4 & 0,7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 20 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 65,5 \\ 51,7 \end{pmatrix}$$

Далее, согласно формуле (11.22), составим все необходимые для вычислений матрицы и векторы:

$$(1+\alpha)A = 1,1\begin{pmatrix} 0,3 & 0,5 \\ 0,4 & 0,3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,33 & 0,55 \\ 0,44 & 0,33 \end{pmatrix}, \ \alpha(\bar{x} - \bar{y}) = 0,1\begin{pmatrix} 45,5 \\ 41,7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4,55 \\ 4,17 \end{pmatrix}$$

$$(E - (1+\alpha)A) = \begin{pmatrix} 0,67 & -0,55 \\ -0,44 & 0,67 \end{pmatrix}, \ (E - (1+\alpha)A)^{-1} = \frac{1}{0,2069}\begin{pmatrix} 0,67 & 0,55 \\ 0,44 & 0,67 \end{pmatrix}.$$

Наконец, при $\Delta\bar{y} = \bar{0}$ получаем решение уравнения (11.22)

$$\Delta\bar{x} = \frac{1}{0,2069}\begin{pmatrix} 0,67 & 0,55 \\ 0,44 & 0,67 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4,55 \\ 4,17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25,8 \\ 23,2 \end{pmatrix}.$$

Сравнение полученного результата с исходным вектором валового выпуска показывает, что даже при нулевом росте конечного потребления для увеличения внутриотраслевого потребления с целью устранения загрязнений необходимо увеличить валовые выпуски на 39,4 и 44,8% в первой и второй отраслях соответственно. Такой прирост является экстенсивной мерой, которая почти невыполнима в реальных условиях экономики. Более приемлемым в данном случае представляется переход к новым ресурсосберегающим и «чистым» технологиям.

11.2.4. Балансовая модель равновесных цен

В последнее время урон, причиняемый окружающей среде, обычно компенсируется экологическим налогом и штрафами, что приводит к удорожанию выпускаемой продукции. В этой постановке задачи полагается, что объемы валовых выпусков и внутриотраслевое потребление неизменны, т. е. матрица прямых затрат A не меняется.

Воспользуемся стоимостной моделью равновесных цен. В матричной форме она имеет вид

$$\bar{p} = A^T\bar{p} + \bar{w}, \tag{11.23}$$

где $\bar{p}$ и $\bar{w}$ — соответственно вектор цен на продукцию отраслей и вектор добавленной стоимости. Средства, направляемые на устранение загрязнений, увеличат компоненты вектора добавленной стоимости $\bar{w}$. Пусть вектор $\bar{w}_{ec} > \bar{0}$ — экологическая «нагрузка» в виде налогов, штрафных санкций, расходов на инженерно-профилактические меры и т. д. Тогда вектор цен на продукцию отраслей при затратах на экологию определяется из уравнения

$$\bar{p}^* = (E - A^T)^{-1}(\bar{w} + \bar{w}_{ec}). \qquad (11.24)$$

Таким образом, изменение цен на продукцию отраслей с учетом соотношения (11.24) составит

$$\Delta\bar{p} = \bar{p}^* - \bar{p} = (E - A^T)^{-1}\bar{w}_{ec}. \qquad (11.25)$$

Поскольку компоненты матрицы $(E - A^T)^{-1}$ в силу продуктивности матрицы затрат A неотрицательны, то $\Delta\bar{p} > \bar{0}$. Отметим, что в этом случае расход ресурсов на выпуск продукции остается неизменным.

Пример 2. Для трехотраслевой экономики (добыча и переработка углеводородного сырья, производство электроэнергии и машиностроение) определить, как повлияет на увеличение цен продукции отраслей необходимость отчисления на экологические мероприятия 20% от добавленной стоимости в первой отрасли и 15% — в третьей отрасли. Исходные цены по отраслям соответственно равны 20, 15 и 40 ден. ед. Известна матрица коэффициентов прямых затрат

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}05 & 0{,}35 & 0{,}40 \\ 0{,}10 & 0{,}10 & 0{,}40 \\ 0{,}20 & 0{,}10 & 0{,}20 \end{pmatrix}.$$

Решение. Вектор цен имеет вид $\bar{p} = (20,\ 15,\ 40)^T$, тогда из формулы (11.23) вычисляем сначала вектор добавленной стоимости по отраслям:

$$\bar{w} = (E - A^T)\bar{p} = \begin{pmatrix} 0{,}95 & -0{,}10 & -0{,}20 \\ -0{,}35 & 0{,}90 & -0{,}40 \\ -0{,}40 & -0{,}40 & 0{,}80 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 20 \\ 15 \\ 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9{,}5 \\ 2{,}5 \\ 18 \end{pmatrix}.$$

Затем определяем, согласно условию задачи, вектор экологической добавленной стоимости:

$$\bar{w}_{ec} = (1{,}9;\ 0;\ 2{,}7)^T.$$

Далее вычисляем матрицу $(E - A^T)^{-1}$, и затем уже по формуле (11.25) определяем приращение ценового вектора, компенсирующее затраты на устранение загрязнений (частичное или полное):

$$\Delta\bar{p} = \begin{pmatrix} 1{,}323 & 0{,}311 & 0{,}370 \\ 0{,}623 & 1{,}323 & 0{,}321 \\ 0{,}973 & 0{,}817 & 1{,}595 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1{,}9 \\ 0 \\ 2{,}7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3{,}51 \\ 2{,}05 \\ 6{,}16 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, в результате указанных отчислений в первой и третьей отраслях цены на продукцию возрастут на 17,6, 13,7 и 15,7% соответственно по отраслям.

Удорожание экологически чистой продукции является уже почти нормой в экономике. Особенно это видно в производстве сельскохозяйственной продукции. Основной причиной этого является использование традиционных технологий, требующих значительных затрат на минимизацию техногенного воздействия на биосферу.

11.3. Модели системной динамики

Основателем этого направления является Дж. Форрестер. На основе теории систем, аппарата дифференциальных уравнений и компьютерного моделирования он разработал аппарат «системной динамики», позволяющий имитировать развитие ситуаций. Им были созданы модели мировой динамики «Мир-1» и «Мир-2» (1971–1972), положившие начало глобальному моделированию. Впоследствии, в рамках этого направления появились более усовершенствованные модели и проекты.

11.3.1. Основные понятия и подходы

Будем опираться на кибернетическую трактовку понятия системы. Под *системой* будем понимать множество взаимосвязанных *элементов* (неделимых частей системы) вместе с отношениями между элементами и их атрибутами. Можно выделить четыре признака системы:

1) целостность системы — принципиальную несводимость свойств системы к сумме свойств составляющих ее элементов и ее относительную независимость от других аналогичных систем;

2) наличие цели и критерия исследования множества ее элементов;

3) наличие внешней среды, вмещающей систему;

4) возможность выделения подсистем или взаимосвязанных частей, представляющих собой по отдельности тоже системы.

В сложных динамических системах элементы связаны большим числом причинно-следственных связей. Важной чертой сложных систем является подчинение их поведения закону адаптации (принцип Ле Шателье), согласно которому всякая система стремится измениться таким образом, чтобы свести к минимуму эффект внешнего воздействия. При этом эколого-экономическим системам присущи конфликты, связанные с краткосрочными и долгосрочными тенденциями реакции этих систем. Например, максимизация выпуска продукции при заданных издержках в краткосрочном периоде приводит к ухудшению экологии в долгосрочном периоде.

Связи между элементами системы подразделяются на *положительные* и *отрицательные* — соответственно, если при прочих равных условиях увеличение переменной A приводит к увеличению (уменьшению) переменной B. Между элементами системы определяются контуры обратной связи с использованием понятий циклов неориентированных графов и контуров в ориентированных графах.

Затем строятся причинно-следственные диаграммы, на совокупности которых основывается системно-динамическая модель и определяются элементы модели и их взаимосвязи. Моделирование и анализ эколого-экономических систем (ЭЭС) состоит из двух больших блоков: модели загрязнения окружающей среды и модели использования ресурсов. В случае глобальной модели ЭЭС в первом блоке используются в основном модели загрязнения атмосферы; для моделей регионального плана используются также и модели загрязнения водной среды и ландшафтов. Во втором блоке рассматривают три вида моделей использования ресурсов: неоклассическую экономическую модель (без учета ограниченности запасов ресурсов в ресурсной экосистеме и накапливания отрицательных последствий их использования), природоохранную модель (с необходимостью жестких ограничений на техногенную деятельность и даже с концепцией «нулевого роста» — одним из основных требований движения «зеленых»), обобщенную модель (учитывающую условия устойчивого развития).

При построении модели основное внимание уделяется структуре системы, которая воспроизводила бы динамику протекающих в ней процессов. В качестве своеобразных «кирпичиков» используются контуры обратной связи; при этом параметры задания обратной связи могут быть заданы с значительными погрешностями — это несущественно скажется на результатах моделирования. Указанное свойство системно-динамических моделей позволяет моделировать сложные системы при наличии неполноты исходной информации или с использованием преимущественно качественной информации.

Идентификация системно-динамических моделей состоит из следующих основных моментов:

- модель должна выходить на все равновесные траектории, присущие системе;
- модель должна адекватно отражать время перехода от состояния к состоянию (равновесные или квазистационарные состояния);
- модель должна отражать характер динамики процессов, протекающих в системе — как установившихся, так и переходных.

При соблюдении указанных условий системно-динамический подход может служить удобным инструментом изучения сложных систем в различных сферах экономики и находить оптимальные стратегии при принятии решений.

11.3.2. Глобальные имитационные модели

Структура системно-динамических моделей ЭЭС включает в себя шесть секторов: население, капиталовложения (фонды), сельскохозяйственные фонды, ресурсы, загрязнение и управление. Такая структура была впервые предложена Дж. Форрестером и реализована в модели «Мир-2».

Математическим аппаратом системной динамики являются обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка. Модель «Мир-2» была построена с использованием 82 уравнений, описывающих взаимосвязи между элементами системы. Первоначально построение и анализ системно-динамических моделей носили скорее алгоритмический, нежели аналитический характер. Сейчас, благодаря созданию объектно-ориентированных языков программирования, стало возможным создание больших моделей, включающих тысячи переменных, которые могут на достаточно достоверном уровне описывать динамику сложных систем.

В качестве иллюстрации приведем модель одного из шести указанных выше секторов — модель использования природных ресурсов в ресурсном секторе модели «Мир-3», разработанной в МГУ и включающей в себя всего около 280 уравнений.

1. Пусть $P_N(t)$ — потенциально используемые ресурсы, V_d — скорость (интенсивность) открытия новых ресурсов, V_r — скорость восстановления ресурсов, зависящая от потраченных ресурсов. Тогда динамика потенциально используемых ресурсов описывается задачей Коши для дифференциального уравнения первого порядка:

$$\frac{dP_N}{dt} = V_r - V_d, \quad P_N(t_0) = P_N^{(0)}. \tag{11.26}$$

2. Для разрабатываемых ресурсов $R_N(t)$ имеем также задачу Коши

$$\frac{dR_N}{dt} = V_d + V_{rc1} - V_{ex} - V_1, \; R_N(t_0) = R_N^{(0)}, \qquad (11.27)$$

где V_{rc1} — скорость переклассификации ресурсов (часть потраченных или истощенных ресурсов рассматриваются в качестве разрабатываемых);

V_{ex} — скорость разработки ресурсов;

V_1 — скорость потерь ресурсов при их добыче.

3. Для используемых ресурсов $U_R(t)$ с учетом скорости потребления ресурсов V_c и скорости рециклирования ресурсов (их вторичной переработки) V_{rc}, зависящих от спроса $D(t)$, задача Коши имеет вид

$$\frac{dU_R}{dt} = V_{ex} + V_{rc}(D) - V_c(D), \; U_R(t_0) = U_r^{(0)}. \qquad (11.28)$$

4. Для потраченных (истощенных) ресурсов $S_R(t)$ с учетом введенных выше скоростей имеем также задачу Коши

$$\frac{dS_R}{dt} = V_c + V_1(D) - V_{rc}(D) - V_r - V_{rc1}, \; S_R(t_0) = S_R^{(0)}. \qquad (11.29)$$

К уравнениям (11.26)–(11.29) добавляется еще система соотношений между величинами в правых частях этих уравнений и неизвестными функциями $P_N(t)$, $R_N(t)$, $U_R(t)$ и $S_R(t)$, полученных из соотношений баланса. Таким образом, для ресурсного сектора мы имеем задачу Коши для системы, состоящей из четырех дифференциальных уравнений первого порядка.

Аналогичные системы дифференциальных уравнений составляются для каждого из перечисленных выше секторов, причем все неизвестные функции «зацеплены» друг с другом посредством ряда соотношений.

Теперь обратимся к результатам имитационного моделирования. В качестве примера приведем результаты расчетов, проведенных по модели «Мир-2», разработанной еще Дж. Форрестером и Д. Медоузом. Хотя с тех пор прошло уже более 30 лет, однако нам важна качественная интерпретация этих результатов, которая по-прежнему остается актуальной. В качестве нулевого отсчета времени был выбран 1900 г. — начало XX столетия, — с тем чтобы уточнить идентификацию модели по данным до середины 70-х гг. этого века. Для разных сценариев (вариантов переменных модели) рассчитывалась динамика восьми величин: невозобновимые ресурсы (1), производство продуктов питания (2), численность населения (3), выпуск промышленной продукции на душу населения (4), загрязнение окружающей среды (5), общий темп смертности (6), общий темп рождаемости (7), производство услуг на душу населения в год (в долларовом эквиваленте) – (8).

На рис. 11.2 показаны соответствующие графики как результаты расчетов на 200 лет вперед в предположении о том, что никаких изменений в характере функционирования в глобальной ЭЭС не произойдет. Следует сразу отметить, что масштабы кривых по вертикальной оси разные, однако здесь важна прежде всего тенденция и направленность процессов во времени. Результаты говорят о крахе системы в результате истощения невозобновимых природных ресурсов к 2100 г., хотя в 1970 г. запас ресурсов еще около 95% от 1900 г. Рост капитала приводит к расходованию большей части ресурсов, а когда цены на них начинают расти, вследствие возрастания объема инвестиций в ресурсных отраслях объемы инвестиций в других отраслях падают. Наступает крах промышленной производственной базы, что обусловливает деградацию сельскохозяйственного производства и производства услуг. Вследствие инерционного роста населения социальная обстановка ухудшается – увеличивается темп смертности из-за недостатка пита-

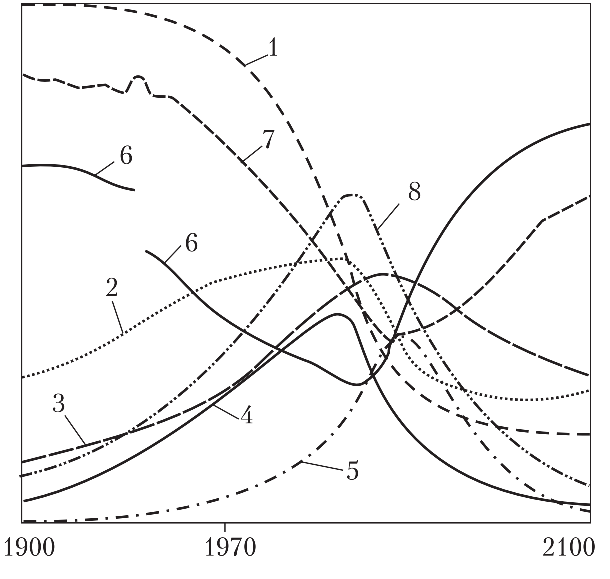


Рис. 11.2

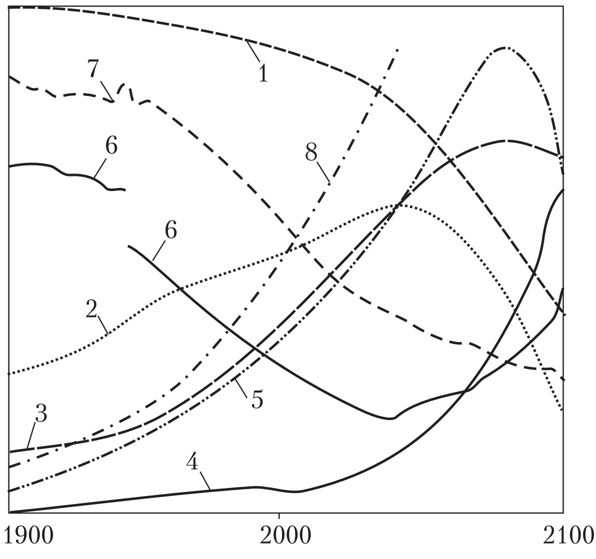


Рис. 11.3

ния и медицинских услуг. Переход к стадии деградации приходится примерно на первую половину XXI в., после пика развития. Точное время наступления этих событий не является значимым из-за высокого уровня агрегирования переменных модели, однако значение имеет тот факт, что рост прекращается задолго до 2100 г.

Все сценарии без контроля над загрязнением дают пессимистические прогнозы для жизнедеятельности человека: даже при «неограниченных» ресурсах общий темп смертности к 2100 г. нарастает вследствие быстрого роста загрязнения окружающей среды, падает численность населения, хотя выпуск продукции и услуг на душу населения растет.

При реализации в модели достижений научно-технического прогресса, позволяющих избежать истощения ресурсов и быстрого загрязнения окружающей среды (полагалось, что с 1975 г. загрязнения от всех источников снижаются в 4 раза), но в условиях прежних стратегий использования ресурсов результаты прогноза являются более оптимистичными (рис. 11.3). Все пики смещаются к 2100 г., причем общий уровень загрязнения окружающей среды возрастает. При достижении предела орошаемых земель производство продуктов питания падает, и рост промышленной продукции замедляется из-за оттока капитала в сектор производства продуктов питания.

В так называемой «Стабилизированной модели мира-1» к ограничивающим стратегиям добавлены также стратегии научно-технического прогресса, включающие в себя вторичную переработку ресурсов, контроль над окружающей средой, увеличение срока службы капитала всех видов, восстановление утраченных из сельскохозяйственного оборота земель. Аспект управления состоит в том, что усилен акцент на производство услуг и продуктов питания, остановлен прирост населения, инвестиции в промышленный капитал равны его амортизации. Результаты этого сценария показаны на рис. 11.4. При снижении ресурсов примерно на треть все основные показатели стабилизируются на уровне примерно 2000 г.

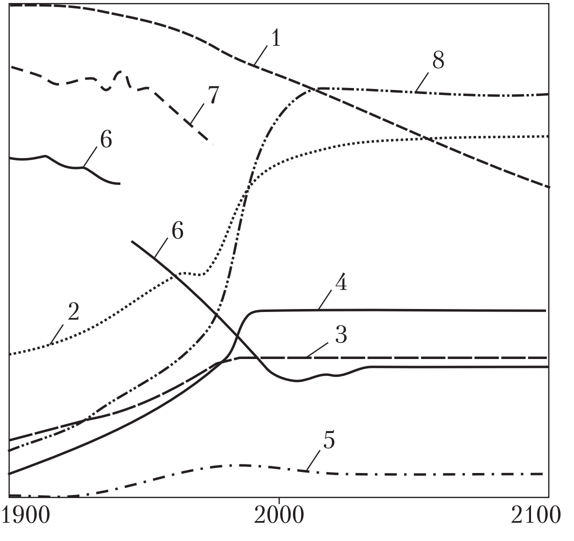


Рис. 11.4

Анализируя системно-динамический подход в целом, необходимо отметить следующие аспекты прогнозирования.

1. Все сценарии прогноза нужно воспринимать прежде всего с качественной стороны, что само по себе уже крайне важно.
2. Прогнозы на длительные сроки заведомо неустойчивы, поскольку они представляют собой экстраполирование современных экономических и технологических возможностей на далекое будущее.
3. Как известно, мультипликатор научно-технического прогресса является экспоненциально растущим во времени. В силу этого цикл

смены технологий сильно сокращается: если раньше от составлял десятки лет, то теперь высокие технологии обновляются всего за несколько лет. Следовательно, мы сейчас стоим на пороге разработки и внедрения принципиально новых ресурсосберегающих, ресурсозаменяющих и замкнутых технологий производства. Разумеется, процесс использования таких технологий будет далеко не равномерным по разным странам и регионам.

4. По-видимому, в ближайшем будущем имеет смысл проводить прогноз с использованием системно-динамических моделей с обновленными программными модулями отражающими новые технологии, причем в силу возрастающей интенсивности темпов развития этих технологий вряд ли имеет смысл прогнозирование на период более 50 лет.
5. Ввиду активизации процессов глобализации мировой экономики следует уделять большее внимание аспекту координированного управления экономическими процессами и техногенным влиянием человека на биосферу и окружающую среду с целью выбора оптимальных стратегий эволюции эколого-экономических систем.

11.4. Модель Месаровича–Пестеля

В проекте «Стратегия выживания» М. Месарович и Э. Пестель выдвинули задачу построения «кибернетической» модели мира. Принципы ее создания были сформулированы в конце 70-х гг. XX в. и обобщены в следующих тезисах.

1. Модель, отражающая сложные процессы взаимодействия человека с окружающей средой и комплекс экономических, социальных и политических взаимоотношений в обществе, должна основываться на теории многоуровневых иерархических систем. Необходимо выделить по крайней мере три уровня: *причинный* — процессы в окружающей среде и функционирование экономики; *организационный* — коллективные действия лиц, принимающих решения, изменяющие состояние причинного уровня; *уровень формирования социальных норм* — процессы формирования ценностей и целей общества.
2. Модель должна быть управляемой — т. е. включать в себя процесс принятия решений, что позволит учесть возможность сознательного воздействия человека на развитие мировой системы.
3. Мир следует рассматривать не как единое целое, а как систему взаимодействующих регионов, различающихся уровнем развития, социально-экономической структурой, традициями и т. д.

Месарович и Пестель критикуют модель «Мир-3» как «механическую», и отмечают, что поскольку она представляет собой замкнутую систему дифференциальных уравнений, то задание ее начального состояния однозначно определяет ее динамику.

11.4.1. Структура модели

Следует подчеркнуть, что законченной «мировой модели» у этих авторов по существу нет. Есть отдельные работы по демографии, экономике, энергетике, продовольственной проблеме, нефтяному кризису. Поэтому модель Месаровича–Пестеля (М–П-модель) следует рассматривать скорее как программу построения глобальной модели и ряд набросков отдельных ее частей.

В М–П-модели все страны мира в соответствии с их социально-экономическими структурами и уровнем развития были разбиты на 10 регионов:

- Северная Америка;
- Западная Европа;
- Япония;
- Австралия и Южная Африка;
- СССР и страны Восточной Европы;
- Латинская Америка;
- Ближний Восток и Северная Африка;
- остальная часть Африки;
- Юго-Восточная Азия;
- Китай.

Каждый регион описывается системой специальных подмоделей с одинаковой структурой, но с различными начальными данными и значениями параметров. Связь регионов осуществляется через импорт, экспорт и миграцию населения. Основными подмоделями в этой системе являются подмодели экономики, демографии и энергетики.

В подмоделях Месаровича–Пестеля ряд параметров систем уравнений остается неопределенным. Управление определяется выбором того или иного сценария (набором значений этих параметров на всем рассматриваемом промежутке времени). Сценарий же выбирается лицом, принимающим решения (ЛПР), человеком, проводящим исследование проблемы. Для каждой проблемы (модели) заранее определяется конечный набор возможных сценариев, которые объединены в дерево решений. ЛПР выбирает приемлемый с его точки зрения сценарий путем исследования дерева допустимых решений в режиме диалога с компьютером. После выбора сценария система становится замкнутой и, соответственно, становится возможным расчет ее траектории.

Следует отметить, что обратные связи между отдельными подмоделями М–П-модели, как правило, отсутствуют. Это приводит к «жесткому» варианту определения эндогенных переменных для подмоделей, использующих в качестве входной информации расчеты других подмоделей.

11.4.2. Подмодель экономики

Подмодель экономики представлена однопродуктовой макроэкономической моделью, отражающей динамику капитала, инвестиции, импорт-экспорт, конечное потребление и правительственные расходы. Подмодель экономики описывает развитие i-го региона системой разностных уравнений с шагом по времени в один год:

$$K_{t+1}^i = K_t^i + I_t^i - K_t^i / T, \ t = 0, 1, 2, \ldots, \tag{11.30}$$

где K — капитал;

I — инвестиции;

T — постоянная износа (убывания) капитала.

Уравнения (11.30) дополняются формулами, в которых определяются следующие компоненты экономики:

- конечный продукт

$$Y^i = Q^i K^i, \tag{11.31}$$

где $Q^i = q_1^i + q_2^i t$ — линейная производственная функция;

- годовые инвестиции

$$I^i = (a_1^i + a_2^i t) Y^i; \tag{11.32}$$

- «возможное» потребление региона

$$C^i = (b_1^i + b_2^i t) Y^i; \tag{11.33}$$

- «возможные» государственные расходы региона

$$G^i = g_1^i + g_2^i t; \tag{11.34}$$

- экспорт региона

$$X^i = (c_1^i + c_2^i t)\sum_{k=1}^{10} Y^k. \qquad (11.35)$$

Коэффициенты в формулах (11.32)–(11.35) определяются путем статистического анализа временных рядов соответствующих величин (в приложениях М–П-модели — за период 1950–1970 гг.).

После этого определяется «возможный» импорт региона из уравнения распределения конечного продукта

$$M^i = C^i + G^i + I^i + X^i - Y^i. \qquad (11.36)$$

Затем вычисляются суммарные (по всем регионам) величины экспорта и импорта

$$M = \sum_{i=1}^{10} M^i, \quad X = \sum_{i=1}^{10} X^i. \qquad (11.37)$$

В случае если они оказываются не равными, производится перераспределение величин импорта, потребления и государственных расходов, так что сумма экспорта по всем регионам становится равной сумме импорта (это нужно для того, чтобы модель была сбалансированной):

$$M_b^i = M^i\left(1 + \frac{1}{2}\frac{X - M}{M}\right) + \frac{X - M}{20}, \qquad (11.38)$$

$$C_b^i = C^i(Y^i - I^i - X^i + M_b^i)/(C^i + M^i), \qquad (11.39)$$

$$G_b^i = G^i(Y^i - I^i - X^i + M_b^i)/(C^i + G^i). \qquad (11.40)$$

Теперь с помощью сбалансированной модели (11.30)–(11.40) можно прогнозировать развитие экономики всех десяти регионов, что было сделано на период до 2025 г.

11.4.3. Подмодель энергетики

Подмодель энергетики состоит из трех отдельных секторов — ресурсов, спроса и предложения.

Сектор ресурсов учитывает сведения об известных энергетических запасах ресурсов на земле и о совершенствующихся методах разведки и технологии добычи полезных ископаемых. В качестве выхода подмодели выступают прогнозы наличия первичных ресурсов (уголь, нефть, газ, уран и торий) для каждого региона в виде временных рядов.

Сектор спроса исходит из прогноза экономического развития, получаемого из подмодели экономики. Априори предполагается наличие функциональной зависимости между валовым региональным продуктом и потребностью региона в энергии в виде

$$E^i = \alpha^i Y^i, \tag{11.41}$$

где α_i является функцией, зависящей от валового продукта на душу населения: $\alpha^i = \alpha^i(Y^i/P^i)$. Вид этой зависимости определяется экспериментальной кривой, определяемой на основе анализа статистических данных по всем регионам.

В основе *сектора предложения* лежит подробная диаграмма потоков энергии. На входе диаграммы находятся импорт и первичные источники энергии, потенциальные запасы которых полагаются известными из сектора ресурсов, а на выходе — конечные пользователи энергии, чьи потребности предполагаются известными из сектора спроса. Структура диаграммы учитывает все потенциально возможные способы переработки, транспортировки и распределения энергетических ресурсов. Коэффициенты эффективности процессов переработки, стоимость технологии переработки и цены на первичные и вторичные энергетические ресурсы полагаются известными и постоянными.

В каждой узловой точке диаграммы выбор коэффициентов распределения, как определение степени развития различных отраслей энергетики и импортно-экспортных отношений, является объектом управления. В рассматриваемом промежутке времени в подмодели предложения энергии сценарий включает следующие величины: добычу каждого вида первичной энергии, импорт и экспорт энергии, распределение первичных энергетических ресурсов по различным способам преобразования, процентное распределение по потребителям вторичных энергетических ресурсов.

В подмодели энергетики вычисляются практически все основные характеристики потребления энергетических ресурсов: годовая стоимость потребляемой первичной энергии, годовая стоимость импорта энергии, необходимое количество новых электростанций и капиталовложения для их строительства, процентное соотношение различных видов энергии в конечном потреблении, объем и стоимость конечного потребления энергии, тепло, выделяемое в атмосферу в процессе переработки и потребления энергии.

Обратная связь между подмоделями энергетики и экономики отсутствует. Макроэкономическая подмодель просчитывается заранее, выход от нее является входной информацией для подмодели энергетики в виде временных рядов потребностей регионов в энергии, так что любое решение в области энергетики ничего не меняет в экономической подмодели. Безусловно, это обстоятельство может существенно повлиять на достоверность прогнозной информации (хорошо известно, что масштабные решения в области энергетики могут изменить динамику экономической подмодели вследствие перераспределения доли валового продукта — например, создание новых технологий переработки первичных энергетических ресурсов требует значительных инвестиций).

11.4.4. Подмодель демографии

В системе региональной М–П-модели мира одной из основных является подмодель демографии. Ее предназначение заключается в достижении двух важных целей:

1) в исследовании роста населения в каждом регионе при определенной демографической политике и взаимодействии этой подмодели с другими подмоделями;

2) в исследовании влияния роста населения на результаты других подмоделей.

Для изучения динамики населения оно разбивается на 86 возрастных групп. Для каждого региона при определении изменения численности населения к $t + 1$ году используются данные о числе живущих людей в t-м году, а также о возможных причинах рождаемости и смертности. В подмодель введены две независимые переменные — время t и возраст l. Время изменяется в пределах 1950–2100 гг., возраст от одного года до 85 лет ($l = 86$ означает возраст не менее 86 лет).

Зависимыми переменными подмодели для каждого региона являются:

P_l^t — число людей, живущих к моменту 1 июля t-го года, родившихся между 1 июля $(t - 1)$ года до 30 июня $(t - l - 1)$ года (в P_{86}^t включены все люди, родившиеся до 1 июля $(t - 85)$ года;

D_l^t — число людей, умерших в промежуток между t и $t + 1$, в каждой возрастной группе;

B_l^t — число людей, родивших детей в за тот же период времени;

I_l^t — разница числа иммигрантов за тот же период времени в каждой возрастной группе;

B^t — число детей, рожденных за тот же временной промежуток;

I_{mi}^t — итоговая величина разности числа иммигрантов и эмигрантов в тот же временной промежуток;

D^t — общее число людей, умерших за тот же временной промежуток;
P^t — общее число людей, живущих к t-му году;

b_l^t — вероятность того, что у человека в возрасте $(l - 1/2,\ l + 1/2)$ родится ребенок между 1 июля t-го года и 1 июля $(t + 1)$-го года;

d_l^t — вероятность смерти в тот же промежуток времени в различных возрастных группах.

Последние две величины берутся из статистических данных; в них могут быть внесены поправки, учитывающие такие факторы, как влияние изменения уровня питания, здравоохранения и т. д. В прогнозах, проведенных Месаровичем и Пестелем, за основной статистический период был выбран интервал времени 1950–1970 гг.

Общий коэффициент рождаемости определяется отношением числа детей, родившихся в год t, ко всему населению в середине этого года

$$b_t^* = B^{t-1/2}/P^t. \qquad (1.42)$$

Таким же образом вводится коэффициент смертности

$$d_t^* = D^{t-1/2}/P^t. \qquad (11.43)$$

Значения величин b_t^* и d_t^* имеются в статистических данных. Из соотношений (11.42) и (11.43) определяются средние значения числа рожденных детей и умерших людей:

$$B^t = (B^{t-1/2} + B^{t+1/2})/2 = (b_t^* P^t + b_{t+1}^* P^{t+1})/2, \qquad (11.44)$$

$$D^t = (D^{t-1/2} + D^{t+1/2})/2 = (d_t^* P^t + d_{t+1}^* P^{t+1})/2. \qquad (11.45)$$

Величины B_1^t, D_1^t, B^t, D^t связаны в совместной системе уравнений:

$$B_l^t = b_l^t P_l^t, \quad l = 1, 2, \ldots, 86; \qquad (11.46)$$

$$B^t = \sum_{l=2}^{86} B_l^t, \qquad (11.47)$$

$$D_l^t = d_l^t P_l^t, \quad l = 1, 2, \ldots, 86; \qquad (11.48)$$

$$D_0^t = d_{1/2}^t\, B^t/2, \qquad (11.49)$$

$$D^t = \sum_{l=2}^{86} D_l^t. \qquad (11.50)$$

Относительно разницы количества иммигрантов по возрастным группам приняты предположения, основанные на статистических данных:

$$I_l^t = \begin{cases} I_{mi}^t/50, & l = 2, \ldots, 51; \\ 0, & l = 1, 52, 53, \ldots, 86. \end{cases} \qquad (11.51)$$

В конкретном сценарии прогноза полагалось, что, начиная с 1970 г., каждый регион считался закрытым, т. е. $I_{mi}^t = 0$ при $t > 1970$ г. Формула для расчета суммарной разницы числа иммигрантов и эмигрантов:

$$I_{mi}^t = P^{t+1} - P^t - B^t + D^t. \qquad (11.52)$$

Наконец, для расчетов количества живущих людей имеем уравнения

$$P_1^{t+1} = B_1^t - D_0^t, \qquad (11.53)$$

$$P_{l+1}^{t+1} = P_l^t - D_l^t + I_l^t, \quad l = 1,\ 2,\ \ldots,\ 86. \qquad (11.54)$$

$$P_{86}^{t+1} = P_{85}^t - D_{85}^t + P_{86}^t - D_{86}^t, \qquad (11.55)$$

$$P^t = \sum_{l=2}^{86} P_l^t. \qquad (11.56)$$

Уравнения (11.46)–(11.56) являются основой демографической подмодели. Кратко опишем возможные аспекты демографической политики и влияния на рост населения других подмоделей.

А. Сохранение уровня рождаемости, смертности, питания и других факторов на уровне, близком к современному, приводит к очень большому росту населения.

Б. При изучении вопроса о достижении равновесного состояния для населения путем регулирования рождаемости (условие $B^t = D^t$) можно определить соответствующее значение b_l^t, однако величина P^t остается неопределенной.

В. При рассмотрении влияния на смертность недостатка протеинов величина вероятности смерти по возрастным группам определялась путем введения соответствующего множителя:

$$d_l^t = d_1^{1970} E(l)(44 - N_P^0)/(N_P(t - t_0) - N_P^0), \qquad (11.57)$$

где

$$E(l) = (E_0 - E^0) \cdot \exp(-l/E^*) + E^0. \qquad (11.58)$$

Здесь E_0 — коэффициент восприимчивости детей к недостатку протеинов, E^0 — аналогичный коэффициент восприимчивости у взрослых, E^* — константа времени процесса, N_P — ежедневное потребление протеинов человеком, N_P^0 — минимально допустимая норма ежедневного потребления протеинов человеком, t_0 — время задержки (лаг) влияния дефицита протеинов.

Рассматривалась демографическая политика управления рождаемостью с учетом возможного дефицита протеинов, направленная на достижение равновесного уровня населения.

11.4.5. Основные результаты модели Месаровича–Пестеля

В результате прогнозных расчетов по различным сценариям были сделаны некоторые выводы, не потерявшие своей актуальности и в настоящее время.

При сохранении существующих тенденций миру угрожает не глобальная катастрофа приблизительно в середине XXI в. (как следует из результатов модели «Мир-3»), а серия региональных катастроф, которые начнутся значительно раньше, в различные моменты времени и по разным причинам для разных регионов.

Согласно прогнозу, региону Юго-Восточной Азии угрожает голод уже в конце текущего десятилетия, что приведет к массовой детской смертности. Последствия региональных катастроф будут ощущаться во всем мире, и избежать общей катастрофы можно лишь согласованными и безотлагательными международными действиями, направленными на оказание помощи развивающимся странам. Однако этой помощи недостаточно для решения всех проблем, и в этих регионах необходимо проводить политику ограничения рождаемости.

Обобщая полученные результаты, авторы модели противопоставляют собственную концепцию развития программе ограничения роста и стабилизации системы на некотором уровне «глобального равновесия», выдвинутой авторами модели «Мир-3». Свою концепцию мирового развития Месарович и Пестель назвали «органическим ростом». Под этим понимается дифференцированное развитие различных частей общей системы, когда в отдельные периоды наряду с ростом одних параметров в определенных регионах имеет место ограничение роста в других регионах. Оценивая проект в целом, необходимо отметить, что до сих пор имеет место значительный разрыв между концептуальными основами модели в целом и конкретными разработанными подмоделями (причем некоторые из них, в свою очередь, являются чрезмерно упрощенными). Подчас анализ объективных причинно-следственных связей подменяется формальной экстраполяцией существующих отношений на весь прогнозный промежуток времени.

Нельзя не отметить, что деление мировой системы на регионы выполнено формально, без учета их внутренней специфики. Проблема взаимодействия регионов практически не решена, так как прогнозируемые экспорт и импорт определяются исходя из экстраполирования их значений на настоящее время. Отдельные подмодели не соединены в единую иерархию, и обратные связи между ними, как правило, отсутствуют.

В целом, невзирая на незавершенность, работа группы Месаровича–Пестеля представляет собой новый интересный этап в процессе моделирования мирового развития. В представленном подходе следует отметить ряд положительных и объективно обусловленных моментов: деление мировой системы на взаимодействующие регионы, специализация и направленность подмоделей на решение конкретных проблем, включение возможности управления.

11.5. Модель с производственной функцией

11.5.1. Формулировка задачи управления

Поскольку основным источником загрязнения являются производственные отходы, то изучение возможности контроля над загрязнением окружающей среды можно проводить с применением аппарата производственных функций и функций полезности. Предположим, что интересы общества описываются функцией полезности $u(c, P)$, в которой аргументы представляют собой соответственно объемы потребления и загрязнения. Будем также предполагать выполнение следующих условий:

$$\frac{\partial u}{\partial c} > 0, \quad \frac{\partial u}{\partial P} < 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial c^2} < 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial P^2} < 0, \quad \lim_{c \to 0} \frac{\partial u}{\partial c} = \infty. \qquad (11.59)$$

Интерпретация приведенных соотношений достаточно прозрачна: предельная полезность по ресурсу потребления положительна, с ростом загрязнения полезность уменьшается; предельные полезности по ресурсам уменьшаются при увеличении их объемов, предельная полезность по ресурсу потребления в нуле имеет точку разрыва второго рода. Сделаем еще одно предположение о функции $u(c, P)$ типа «замещения»: если потребление c уменьшится на некоторую величину Δc, то для того чтобы значение функции полезности не изменилось, необходимо уменьшить объем загрязнения P на некоторую величину ΔP. Как и в классическом аппарате производственных функций, определим предельную норму замещения

$$S = \frac{dP}{dc} = -\frac{\partial u}{\partial c}\bigg/\frac{\partial u}{\partial P}. \tag{11.60}$$

Предположение, связываемое с функцией $u(c, P)$, состоит в том, что при малом уровне потребления для возмещения уменьшения на одну единицу требуется уменьшить объем загрязнения на очень большую величину, и наоборот, при неограниченном возрастании c величина ΔP, необходимая для замещения одной единицы потребления, стремится к нулю. Иными словами, линии уровня функции (11.60), определяемые уравнениями

$$S(c,\ P) = S_0,\ \ S_0 > 0, \tag{11.61}$$

имеют вид гипербол. Следовательно, кривые $P = P(c, S_0)$, определяемые уравнениями (11.61), должны обладать следующими свойствами:

$$\lim_{c\to 0} P(c,\ S_0) = \infty, \quad \lim_{c\to\infty} P(c,\ S_0) = 0, \tag{11.62}$$

а также монотонно убывать с ростом c.

С учетом (11.60) условие монотонного убывания функции $P(c, S_0)$ имеет вид

$$\frac{dP}{dc} = -\frac{\partial S}{\partial c}\bigg/\frac{\partial S}{\partial P} < 0.$$

Подстановка в это условие частных производных функции полезности $S(c, P)$ приводит к неравенству

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial c^2} - \frac{\partial u/\partial c}{\partial u/\partial P}\frac{\partial^2 u}{\partial c\,\partial P}\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial P^2}\frac{\partial u/\partial c}{\partial u/\partial P} - \frac{\partial^2 u}{\partial c\,\partial P}\right) < 0. \tag{11.63}$$

Неравенство (11.63) справедливо, в частности, если $\dfrac{\partial^2 u}{\partial c\,\partial P} \le 0.$ Например, функцией полезности, удовлетворяющей указанным выше условиям, является функция

$$u(c,\ P) = Ac^a - BP^b;\ A > 0,\ B > 0,\ 0 < a < 1,\ 0 < b < 1. \tag{11.64}$$

В качестве критерия оптимизации принимается интеграл от функции полезности вдоль конкретной траектории $(c(t), P(t))$ с учетом дисконтирования:

$$W = \int_0^T u(c, P)e^{-rt}dt. \tag{11.65}$$

В качестве производственной функции будем рассматривать известную неоклассическую однопродуктовую функцию Кобба–Дугласа $F(K, L)$ с аргументами K и L — соответственно объемы основного капитала и ресурса труда. Для упрощения будем полагать, что объем L и темп амортизации μ не меняются во времени. Будем также полагать, что объем загрязнения пропорционален объему выпуска продукции и составляет долю от него $0 < \varepsilon < 1$, т. е. загрязнение измеряется в тех же единицах, что и основная продукция. Например, производство металла и бумаги является именно таковым.

Как известно, окружающая среда обладает определенной способностью ассимилировать отходы производства. Пусть естественная убыль отходов в каждый момент времени составляет долю γ от их общего количества. Будем полагать, что эффективность затрат на уменьшение загрязнения постоянна, и при этом затрата одной единицы продукции уменьшает загрязнение на δ единиц $(\delta > 1)$.

Задача управления состоит в определении долей α и β выпуска, предназначенных для потребления и уменьшения загрязнения. Задача сводится к следующей системе уравнений:

$$c = \alpha F(K, L), \tag{11.66}$$

$$K' = (1 - \alpha - \beta)F(K, L) - \mu K, \tag{11.67}$$

$$P' = (\varepsilon - \delta\beta)F(K, L) - \gamma P, \tag{11.68}$$

$$0 \le \alpha(t) \le 1,\ 0 \le \beta(t) \le 1,\ \alpha(t) + \beta(t) \le 1. \tag{11.69}$$

Здесь и далее штрих означает производную по времени.

В приведенной постановке полагается, что технология производства остается неизменной, поскольку она определяется конкретным видом производственной функции $F(K, L)$, задаваемой априори.

11.5.2. Решение задачи управления

Будем решать задачу нахождения оптимальных траекторий с применением принципа максимума Понтрягина. Обозначим через $\psi_1(t)$

двойственную переменную, соответствующую уравнению (11.67), а через $\psi_2(t)$ двойственную переменную, соответствующую уравнению (11.68). Поясним, что $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$ — это объективно обусловленные оценки капитала $K(t)$ и загрязнения $P(t)$ соответственно в момент времени t. Тогда гамильтониан H имеет вид:

$$H = u(c, P)e^{-rt} + \psi_1[(1-\alpha-\beta)F(K, L) - \mu K] + \psi_2[(\varepsilon - \delta\beta)F(K, L) - \gamma P].$$

Двойственная система уравнений такова:

$$\psi_1' = -\left\{\frac{\partial u}{\partial c}\alpha\frac{\partial F}{\partial K}e^{-rt} + \psi_1[(1-\alpha-\beta)\frac{\partial F}{\partial K} - \mu] + \psi_2(\varepsilon - \delta\beta)\frac{\partial F}{\partial K}\right\}.$$

$$\psi_2' = \frac{\partial u}{\partial P}e^{-rt} + \psi_2\gamma.$$

После перенормировки двойственных оценок $q_1 = \psi_1 e^{rt}$, $q_2 = \psi_2 e^{rt}$ двойственная система принимает вид

$$q_1' = -\frac{\partial u}{\partial c}\alpha\frac{\partial F}{\partial K} + q_1[r + \mu(1-\alpha-\beta)\frac{\partial F}{\partial K}] + q_2(\delta\beta - \varepsilon)\frac{\partial F}{\partial K}, \quad (11.70)$$

$$q_2' = -\frac{\partial u}{\partial P} + q_2(\gamma + r). \quad (11.71)$$

При этом гамильтониан H запишется в виде

$$H = e^{-rt}\{u(\alpha F(K, L), P) + q_1[(1-\alpha-\beta)F(K, L) - \mu K] + \\ + q_2[(\varepsilon - \delta\beta)F(K, L) - \gamma P]\}.$$

Согласно принципу максимума, если управление $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ оптимально, то существуют непрерывные функции $q_1(t)$ и $q_2(t)$, удовлетворяющие уравнениям (11.70) и (11.71). При этом функции $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ максимизируют в момент времени t значение гамильтониана H, который является функцией переменных $q_1(t)$, $q_2(t)$, $K(t)$, $P(t)$, α, β.

Перегруппируем члены в функции H:

$$H = e^{-rt}\{u(\alpha F(K, L), P) - q_1\alpha F(K, L) - (q_1 + q_2\delta)F(K, L)\beta + \\ + q_1(F(K, L) - \mu K) + q_2(\varepsilon F(K, L) - \gamma P)\}. \quad (11.72)$$

Отсюда видно, что для получения максимума функции H по переменным α и β достаточно максимизировать выражение

$$\varphi(\alpha, \beta) = v(\alpha) + \theta\beta, \quad (11.73)$$

в котором

$$v(\alpha) = u(\alpha F(K, L), P) - q_1 \alpha F(K, L), \ \theta = -(q_1 + q_2 \delta) F(K, L), \quad (11.74)$$

в области

$$\alpha \geq 0, \ \beta \geq 0, \ \alpha + \beta \leq 1. \quad (11.75)$$

В случае если $\theta > 0$, то очевидно, что максимум функции $\varphi(\alpha, \beta)$ достигается при $\alpha + \beta = 1$. Если $\theta < 0$, то β произвольно, а α либо равно нулю, либо является решением уравнения $\partial v/\partial\alpha = 0$. Заметим, что максимум функции $v(\alpha)$ не может достигаться в точке $\alpha = 0$ в силу третьего условия (11.59).

11.5.3. Стационарные траектории

Полный анализ поведения оптимальных траекторий для этой модели достаточно сложен, поскольку она содержит два управляющих параметра. Далее мы определим число траекторий сбалансированного роста (точек равновесия), удовлетворяющих необходимым условиям принципа максимума. Покажем, что существуют ровно две точки равновесия. В одном из таких положений средства на утилизацию загрязнений не тратятся — это так называемое «равновесие темного века», характеризуемое высоким уровнем производства (большим объемом основного капитала), высоким уровнем потребления и высоким уровнем загрязнения. В другом положении равновесия расходы производятся как на потребление, так и на устранение загрязнений — «равновесие золотого века», характеризуемое более низкими уровнями капитала, потребления и загрязнения.

Состояние равновесия соответствует условиям $K' = 0$ и $P' = 0$, тогда из уравнений (11.67) и (11.68) получаем:

$$(1 - \alpha - \beta) F(K, L) = \mu K, \quad (11.76)$$

$$(\varepsilon - \delta\beta) F(K, L) = \gamma P. \quad (11.77)$$

Поскольку в состоянии равновесия величина K постоянна и положительна, то из (11.76) следует, что сумма $\alpha + \beta$ соответствующих оптимальных управлений постоянна и строго меньше единицы. Значит $\alpha < 1$ и $\beta < 1$, т. е. имеет место случай $\theta \leq 0$. Из (11.77) следует, что β (а тогда и α) постоянная величина. Так как $\alpha < 1$, то $\partial v/\partial\alpha = 0$, т. е.

$$\frac{\partial}{\partial c}(u(\alpha F(K, L), P)) = q_1, \quad (11.78)$$

отсюда вытекает, что функция $q_1(t)$ также является константой. Но тогда из формулы (11.70) получаем, что q_2 также константа. Из (11.71) получаем выражение для q_2 через функцию u:

$$q_2 = \frac{\partial u}{\partial P} / (\gamma + r). \tag{11.79}$$

Для состояния равновесия с учетом (11.68) уравнение (11.70) принимает вид

$$q_1(r + \mu - \frac{\partial F}{\partial K} + \beta \frac{\partial F}{\partial K}) + q_2(\delta\beta - \varepsilon)\frac{\partial F}{\partial K} = 0. \tag{11.80}$$

Итак, рассмотрим два случая равновесия: *равновесие золотого века* (при $\theta = 0$) и *равновесие темного века* (при $\theta < 0$).

11.5.4. «Золотой век»

В этом случае $\theta = 0$, и тогда из второго выражения (11.74) получаем, что $q_2 = -q_1/\delta$. Подстановка полученной формулы для q_2 в уравнение (11.80) приводит к уравнению

$$q_1[r + \mu - (1 - \frac{\varepsilon}{\delta})\frac{\partial F}{\partial K}] = 0.$$

Если $q_1 = 0$, то и $q_2 = 0$, что противоречит принципу максимума. Следовательно, равно нулю выражение в квадратных скобках, откуда получаем

$$\frac{\partial K}{\partial F} = \frac{r + \mu}{1 - \varepsilon/\delta}. \tag{11.81}$$

Правая часть этого уравнения положительна при условии $\varepsilon < 1 < \delta$. Совместно с обычными неоклассическими условиями для производственной функции

$$\lim_{K \to 0} \frac{\partial F}{\partial K} = \infty, \quad \lim_{K \to \infty} \frac{\partial F}{\partial K} = \infty, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial K^2} < 0;$$

это обеспечивает существование единственного решения K^* уравнения (11.81).

Далее из (11.79) с учетом (11.68) получаем

$$\frac{\partial u}{\partial P} = -\frac{r + \gamma}{\delta}\frac{\partial u}{\partial c}$$

или

$$-\frac{\partial u/\partial P}{\partial u/\partial c}=\frac{r+\gamma}{\delta}. \tag{11.82}$$

Поскольку правая часть этого равенства положительна, то наше предположение о характере замещения функции $u(c, P)$, сделанное ранее (п. 11.5.1), позволяет утверждать, что кривая, определяемая уравнением (11.82) в плоскости (c, P), монотонно убывает от ∞ до 0 при возрастании c от 0 до ∞.

Исключив β из системы уравнений (11.78), (11.77), находим зависимость между K^* и P:

$$\alpha\delta F(K^*,\ L)=-\mu\delta K^*+\gamma P+(\delta-\varepsilon)F(K^*,\ L).$$

Так как в силу (11.66) $c=\alpha \mathrm{F}(K^*, L)$, то отсюда получаем зависимость между c и P:

$$\delta c=-\mu\delta K^*+\gamma P+(\delta-\varepsilon)F(K^*,\ L). \tag{11.83}$$

Поскольку значение K^* определено и единственно, то уравнение (11.83) определяет на плоскости (c, P) прямую с угловым коэффициентом $\gamma/\delta>0$. Следовательно, система уравнений (11.82), (11.83) имеет единственное решение (c^*, P^*), причем $c^*>0$, $P^*>0$.

11.5.5. «Темный век»

В этом случае $\theta<0$ и потому $\beta=0$. Тогда из уравнения (11.60) получаем

$$\frac{\partial F}{\partial K}=\frac{r+\mu}{1+q_1/q_2},$$

или, после подстановки выражений (11.78) и (11.79) для q_1 и q_2.

$$\frac{\partial F}{\partial K}=(r+\mu)\left(1+\frac{1}{\gamma+r}\frac{\partial u/\partial P}{\partial u/\partial c}\right)^{-1}. \tag{11.84}$$

Из уравнения (11.77) при $\beta=0$ имеем

$$P=\frac{\varepsilon}{\gamma}F(K,\ L). \tag{11.85}$$

Уравнение (11.85) определяет P как неявную функцию от K, и в этом случае можно вычислить производную dP/dK. Не проводя несложных, но громоздких преобразований, скажем только, что из явного вида этой производной и характера замещения функции u (п. 11.5.1), следует, что $dP/dK < 0$. Вместе с тем для функции (11.85) справедливо неравенство $dP/dK > 0$. Следовательно, существует единственное решение K^{**}, P^{**} системы уравнений (11.84), (11.85). В таком случае из уравнения (11.76) при $\beta = 0$ получается единственное значение c^{**}:

$$c^{**} = \alpha^{**} F(K^{**}, L) = F(K^{**}, L) - \mu K^{**}. \tag{11.86}$$

Итак, в случае «темного века» также существует единственное положение равновесия (c^{**}, P^{**}), при котором

$$P^{**} = \frac{\varepsilon}{\gamma} F(K^{**}, L).$$

11.6. Информационный аспект экологического фактора в экономике

В настоящее время в экономике многих развитых стран усиливается тенденция учета социального фактора и обеспечения жизнедеятельности населения. Можно ожидать, что уже в ближайшем будущем эта тенденция займет главную позицию в мировой экономике и будет существенно определять международные экономические отношения. В свете такого подхода неизмеримо возрастает учет экологического фактора в макроэкономике и особым образом встает специфическая проблема роли, места и организации экологической информации. В связи с этим особую актуальность приобретает разработка нового концептуального подхода к экологической информации как современной экономической категории.

11.6.1. Аспекты новой концепции

Существенная разница подходов в оценках экологической ситуации в значительной мере обусловлена отсутствием единообразных приемов и методов продуцирования соответствующей информации, а также ее обработки и использования. Традиционные нормы экологических стандартов часто исходят из требований почти 100-процентного соблюдения чистоты производства. Поскольку человек живет и существует в природе вместе с сопутствующими и создаваемыми им производствами, такое требование представляется бессмысленным: действительно, в таком случае нужно отказаться от всех промышленных и сельскохозяйственных предприятий, и тогда воздействие на окружающую среду будет сведено к нулю. Кстати, в ряде регионов России в результате промышленного спада экологическая обстановка начала заметно улучшаться. В свое время развивались научные направления развития экономики при отсутствии структурных изменений в будущем — Д. Форрестер и его школа пришли к концепции «нулевого роста». Именно эта концепция инициировала движение «зеленых» за запрещение загрязняющих производств и за ограничение роста экономики. По мнению видных экономистов такой путь не ведет к развитию отдельных стран и мировой экономики в целом.

Таким образом, в настоящее время возникает настоятельная необходимость выработки нового подхода к анализу состояния окружающей среды, как информационного блока, оптимизирующего все экономические построения и модели и являющегося одним из основных пунктов в развитии экономики и мирохозяйственных связей.

Основными этапами такого подхода должны быть следующие.

1. Анализ наблюдаемых природных циклов и колебаний процессов в окружающей среде и установление временных и пространственных рамок этих колебаний, в которых не происходит необратимых изменений в природной обстановке.
2. Анализ воздействий на окружающую среду в рамках допустимых естественных колебаний природных процессов, не приводящих к ее необратимому изменению, при котором жизнедеятельность человека затруднена или становится невозможной.
3. Обоснование концепции базы данных основных экологических рамок устойчивости отдельных территорий и регионов, которые являются или могут являться субъектами мирохозяйственных связей. Эта база данных должна входить в основной ряд экономических показателей, используемых при анализе и планировании экономического развития.

Процесс компьютерного моделирования заключается в «проигрывании» разных сценариев техногенного воздействия на различные участки территорий, вовлекаемых в хозяйственное освоение. При этом современная цель моделирования заключается не только в прогнозе поведения окружающей среды при техногенном воздействии на нее, но и в получении важнейших характеристик в экологическом и экономическом плане. К ним следует отнести:

- тарификацию всех участков территорий с оценкой пределов экологической устойчивости по единой балльной шкале (участки, имеющие знак плюс, могут подвергаться определенной техногенной нагрузке, участки со знаком минус требуют прекращения техногенного воздействия и осуществления природоохранных мероприятий);

- планирование и осуществление природоохранных мероприятий на участках территорий, вовлекаемых в хозяйственную деятельность;
- планирование оптимальной деятельности уже существующих предприятий и сооружений промышленной и гражданской застройки с целью обеспечения режимов эксплуатации, позволяющих в течение длительного периода соблюдать пределы экологической устойчивости в районах их размещения;
- рациональное размещение существующих технологий и природоохранных мер на территориях предполагаемого освоения;
- использование технологий, снижающих степень техногенного воздействия на осваиваемые участки;
- прогноз поведения окружающей среды при необратимых ее изменениях в результате хозяйственного освоения (прогноз развития и интенсивности чрезвычайных ситуаций).

11.6.2. База данных экологической информации

Результаты обработки исходной экологической информации посредством компьютерного моделирования представляют собой также экологическую информацию, имеющую экономическую значимость; она является даже более ценной, поскольку имеет рекомендательные и управляющие аспекты. Здесь возникает необходимость разработки концепции базы данных экологической информации, на основе которой можно было бы определять степень экологической устойчивости регионов, являющихся субъектами мирохозяйственных связей. Информация должна быть подготовлена и адаптирована к использованию в соответствующих экономико-математических моделях. На наш взгляд, в ней следует предусмотреть два взаимосвязанных уровня.

1. Первый уровень включает в себя первичную экологическую информацию о природной и техногенной обстановке территорий. Сюда также входит информация о пределах экологической устойчивости конкретных участков по наиболее характерным природным процессам, имеющим на них место. Сюда также рационально включать и базы данных по имеющимся отклонениям от экологи-

ческого равновесия и загрязнениям окружающей среды. Последние должны содержать подробный элементный и количественный анализ существующих источников и накоплений загрязняющих веществ. По сути дела, экологический мониторинг является существенной составной частью первичной экологической информации.

2. На основе первого уровня базы данных экологической информации может быть создан второй уровень — соответствующая база данных, тарифицирующая регионы, участвующие в мирохозяйственных связях, как объекты возможного технологического освоения с определенными рамками и допусками такого освоения.

Схема двухуровневой базы данных экологической информации показана на рис. 11.5.

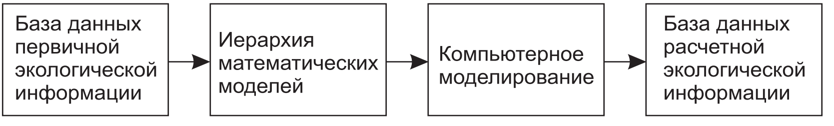


Рис. 11.5

Однако новый подход к оценке экологической информации требует указания ее роли и места в экономике и даже введения новых экономических категорий, непосредственно связанных с экологией.

11.6.3. Экономический фактор экологической информации

Как уже говорилось выше, в современной мировой экономике усиливается тенденция к первичности социального подхода. На первый план выдвигаются такие факторы, как обеспечение жизнедеятельности стран и обеспечение жизнедеятельности на Земле в глобальных масштабах. Изменения природной обстановки на отдельных территориях неизбежно суммируются за длительные периоды времени в глобальных изменениях экологической ситуации и необратимых изменениях климата. Попытки вернуть утраченное природное равновесие требуют огромного объема инвестиций и создания специальных дорогостоящих очищающих технологий.

Эти факторы находят свое отражение в мирохозяйственных связях, а также в экономической политике государств. Так, существует запрет на производство и выброс в атмосферу фреонов, разрушающих защитный озоновый слой (естественная защита от солнечного излучения в ультрафиолетовом и *R*-диапазоне). Интенсивно ведется поиск новых ресурсосберегающих и малоотходных технологий. В возрастающих масштабах проявлятся тревога стран с развитой экономикой, вызванная масштабами загрязнения на обширных пространствах планеты, и в частности в России.

Предлагаемый подход позволяет рассматривать экологический фактор и экологическую информацию как экономическую категорию, учет которой необходимо будет приводить к поиску и разработке новых ресурсосберегающих и малоотходных технологий для вовлечения территорий в хозяйственную деятельность. Фактически все прежние технологии и методы никогда не включали в рассмотрение на уровне экономической категории экологический фактор, а потому оказались сегодня затратными и экономически разорительными.

Отсюда можно сделать важный вывод о необходимости привлечения и использования экологической информации как одной из самых существенных компонент макроэкономики регионов и страны. В свете новых подходов представляется также, что роль этой компоненты будет быстро возрастать и в международных экономических отношениях и связях. Иными словами, продуцирование экологической информации и ее учет в экономических планах и моделях является необходимым экономическим процессом, а сама экологическая информация в виде баз данных имеет экономическую категорию товара, обладающего возрастающей во времени стоимостью.

Базы данных экологической информации, как специфический товар, могут представлять интерес лишь при наличии соответствующего спроса. Уместно ввести в рассмотрение обобщенный показатель, который отражал бы экономическую значимость экологической информации. Понятно, что этот показатель не может являться общей характеристикой для всех стран: он может существенно варьировать в зависимости от уровня экономического развития. Пусть I_t — объем экологической информации, которая может быть объективно получена в момент времени t, а I_u — объем этой информации, используемой в экономике страны (в ее природоохранном законодательстве). Тогда отношение

$$K_{ec} = I_u / I_t \tag{11.87}$$

представляет собой коэффициент востребованности экологической информации.

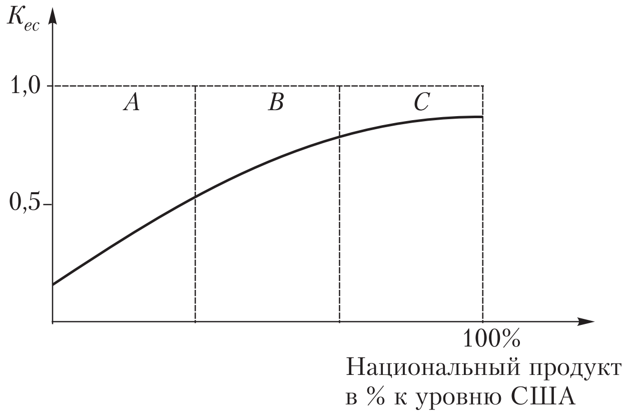


Рис. 11.6

На наш взгляд, эта величина вполне отражает уровень инфраструктуры и развития экономики страны, определяя спрос в экономике на экологическую информацию. На рис. 11.6 показана качественная зависимость K_{ec} от одного из важнейших экономических показателей — ВВП на душу населения N_p (в % к уровню США). Эта зависимость получена как результат анализа и определенной статистической обработки опубликованных данных (характер и объем получаемой и используемой экологической информации, ВВП и т. д.). Как следует из этой иллюстрации, K_{ec} возрастает при росте N_p, т. е. рост благосостояния общества неизбежно связан с увеличением удельного веса экологической информации, используемой в экономике страны. На рис. 11.6 четко выделяются три зоны: зона A соответствует группе стран с неразвитой экономикой (туда в настоящее время попадает и Россия), зона B — группе стран с развивающейся экономикой, зона C — группе стран с развитой экономикой (США, Япония, Швеция, Германия).

Отсюда можно сделать два важных вывода. Во-первых, в силу монотонности функции K существует также обратная монотонно возрастающая функциональная зависимость ВВП на душу населения N_p от востребованности и спроса экономики на экологическую информацию K_{ec} (рис. 11.7). Это означает, что рост ВВП непосредственно связан с улучшением условий жизнедеятельности общества и окружающей среды. Во-вторых, экологическая информация начинает играть заметную роль как объект и элемент информационного бизнеса лишь начиная с определенного этапа экономического развития страны. Это подтверждается мнением М. Портера, что «страны с наиболее жестким природоохранным законодательством имеют наиболее высокие экономические показатели».

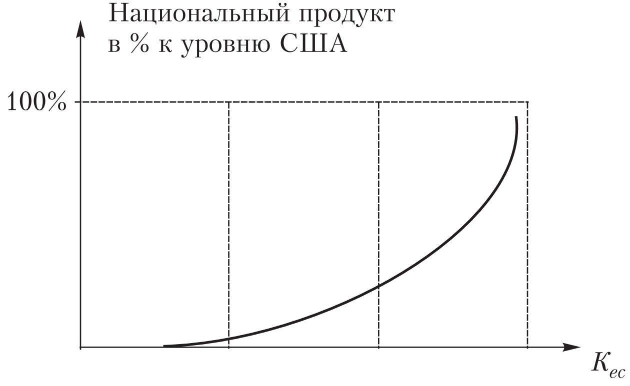


Рис. 11.7

В последнее время формирование конкурентных преимуществ достигается посредством проведения активной экологической политики в рамках экономической стратегии наиболее развитых государств. Вмешательство государства в решение экологических проблем определяется тем, что рыночные механизмы сами по себе сегодня не способны учитывать экологические издержки в цене товаров. По М. Портеру основные для конкурентоспособности факторы не наследуются, а создаются, причем наибольшее значение имеет эффективность их использования — темпы создания и механизмы совершенствования. М. Портер опровергает распространенное мнение, что меры экологической политики негативно влияют на конкурентоспособность государств. Примером могут служить Япония и США, даже в такой неблагоприятной с экологической точки зрения отрасти, как химическая. США занимают лидирующее место в мире по доле расходов на экологию в ВВП, они опередили даже Германию по экспорту оборудования для контроля за загрязнением атмосферы (эту нишу экологического рынка М. Портер считает наиболее перспективной).

Укажем еще два важных аспекта использования экологической информации в информационном бизнесе в мировых экономических связях.

1. Информацию о местах расположения и объемах техногенных загрязнений можно с успехом использовать в информационном биз-

несе в качестве сведений о ценных, доступных и относительно дешевых вторичных ресурсах. Например, ждут своего освоения огромные хвостохранилища карьеров по добыче редких металлов, обширные площади бассейнов рек Сибири, заморенные топляком, пустынные участки в Западной Сибири, превращенные в нефтяные болота. Во всех этих случаях экологические допуски разработки природных ресурсов уже исчерпаны, однако эти территории можно рассматривать как субъекты, подлежащие интенсивному освоению техногенного сырья, что приведет к улучшению экологической обстановки, развитию экономики регионов и повышению степени их участия в мировых хозяйственных связях.

2. Базы данных экологической информации в странах с развитой экономикой являются основой для проведения технологической и экономической экспертизы проектов вовлечения территорий в хозяйственную деятельность и освоения природных ресурсов.

Наконец, укажем на свойство глобального характера, а именно — экологическая информация является частью общего информационного потока, и потому она играет все возрастающую роль в международных экономических отношениях. Без сомнения, информационное обеспечение является неотъемлемым фактором развития экономики и глобальной экономической политики, и в этом плане экологический информационный поток в ближайшее время станет одной из важнейших компонент мирового информационного бизнеса.

В свете сказанного выше выявляется новая роль экологической информации — возможность ее использования в управлении экономикой. Здесь на первый план в условиях глобализации мировой экономики и мирохозяйственных связей выступает приоритет обеспечения нормальной жизнедеятельности мирового сообщества.

При этом особо важным является даже не само введение строгих стандартов и норм, а их упреждающее принятие по сравнению с другими странами, перманентное ужесточение и контроль за их выполнением.

Оценивая в целом состояние экосистем нашей планеты как результат техногенного воздействия на окружающую среду, можно с определенностью сказать, что мировое сообщество в настоящее время живет в условиях развивающегося экологического кризиса. Это чревато разрушительными последствиями в мировой экономике, связанными прежде всего с массовым исходом людей из зон экологических бедствий и необходимостью гигантских затрат на хотя бы частичное восстановление окружающей среды.

Наиболее кризисным в экологическом плане континентом является Европа. Именно поэтому активизировалась в последние годы экологическая деятельность ЕС. В числе мероприятий, обеспечивающих экологии место в экономике, являются следующие:

- реорганизация налоговой системы, стимулирующая сохранение и восстановление природной среды;
- разработка и освоение ресурсо- и энергосберегающих технологий;
- утилизация отходов с их вторичным использованием;
- поиск технических решений, способствующих предотвращению выброса в атмосферу углекислого газа при сжигании топлива.

Япония и Германия создали обширные зарубежные рынки для экологически чистого оборудования, заставляя свои компании следовать стандартам с опережением конкурентов. В Германии действуют наиболее жесткие экологические стандарты, она увеличила долю экспорта экологических товаров, поступившись при этом частью мирового рынка промышленной продукции. На эту страну приходится более 40% экологических международных патентов на товары; экологическая продукция стала для нее объектом специализации и способствует повышению ее международной конкурентоспособности. В Скандинавии высокие природоохранные требования послужили толчком для развития соответствующих технологий и создали ее промышленности приоритетную нишу на мировом рынке.

В США разработана крупномасштабная экономическая программа, являющаяся прообразом экологической экономики для всего индустриального мира. В качестве кардинальных мер в ней предусматривается перевод всего автотранспорта на экологически чистое топливо типа метанола или на электричество и введение ужесточенных санитарно-гигиенических норм на питьевую воду.

Начал формироваться и развивается международный рынок экологически чистых продуктов, который затрагивает практически все сферы производства и услуг, что стимулирует разработку экологически чистых технологий. Уже сегодня объем экологического рынка оценивается в 600 млрд долл.; наблюдается тенденция его роста темпами, значительно превышающими средние темпы прироста мировой экономики. Создаются предпосылки для роста спроса также на экологически чистые жилища.

Назревает необходимость разработки новой концепции развития мирового сообщества на основе которой можно было бы предпринимать направленные и продуманные усилия и осуществлять корректировку развития мирового сообщества, исходя прежде всего из обеспечения нынешней и будущей жизни на нашей планете. Основной принцип такого подхода предельно ясно изложен в Стокгольмской инициативе: «Народам мира следует жить, исходя из общей ответственности при определении будущего человечества».

Глава 12

Модели динамики государственного долга

Государственный долг возникает в определенные периоды функционирования государства, когда его расходы начинают превышать доходы. Бюджетный дефицит становится хроническим явлением и его покрытие осуществляется не только эмиссионными методами, но и путем государственных заимствований.

Государственные заимствования проводятся в виде государственных займов и прямых кредитов. Государственные займы являются привлечением временно свободных денежных средств физических и юридических лиц путем выпуска и реализации государственных ценных бумаг. Основным видом ценных бумаг, символизирующим долговое обязательство государства, являются облигации. Для кредитов характерно то, что инвесторы непосредственно передают часть своих кредитных ресурсов.

В качестве рычага управления государственный долг обеспечивает возможность оказывать влияние на денежное обращение, финансовый рынок, инвестиции, производство, занятость и многие другие экономические процессы. Одновременно государственный долг выступает и в качестве объекта управления. Государство определяет соотношение между различными видами долговой деятельности (государственные заимствования, кредиты, гарантии), структуру видов долговой деятельности по срокам и доходности, механизм построения конкретных государственных займов, кредитов и гарантий.

Попытки решения проблем, связанных с государственным долгом, сталкиваются с серьезными методологическими трудностями, а также со сложностями прикладного характера. Сюда можно отнести преобладание эмпирического подхода к проблеме задолженности, недостаточную научную обоснованность методов оценки последствий принимаемых решений в области государственного долга, слабое использование математических методов в практической деятельности, серьезный разрыв в представлениях о финансовом процессе у экономистов и разработчиков информационных систем. Поэтому решение проблемы урегулирования задолженности невозможно без моделирования и поиска оптимальных стратегий. Математическое моделирование управления государственным долгом предоставляет возможность на научной основе анализировать финансовые потоки, делать прогнозы и выбирать рациональные решения.

12.1. Классификация и экономические признаки государственного долга

Государственный долг подразделяется на капитальный, основной и текущий. Капитальный долг представляет собой всю сумму принятых и непогашенных государством долговых обязательств и гарантированных им обязательств других лиц, включая начисленные проценты, которые должны быть выплачены по этим обязательствам. Основной долг — это номинальная стоимость всех долговых обязательств государства и гарантированных им заимствований. Текущий государственный долг — это предстоящие расходы по всем долговым обязательствам государств и по погашению обязательств, по которым срок оплаты уже наступил.

Государственный долг также классифицируется на внешний и внутренний. Согласно Бюджетному кодексу РФ, в основу деления заимствований на внешние и внутренние положен признак валюты заимствования: внешний долг — это обязательства, возникающие в иностранной валюте, внутренний долг — это обязательства, возникающие в валюте России. Следует отметить, что указанное деление долга на внешний и внутренний в условиях глобализации мировой экономики может быть достаточно условным.

Внутренний долг государства означает внутренний трансферт в пределах своей страны, в то время как внешний долг государства является бременем для страны, так как представляет собой чистый трансферт из страны. Внешний долг не может быть погашен при помощи денежной эмиссии, так как исчисляется в иностранной валюте.

Для внешнего долга и внешнего заимствования существуют естественные и дополнительные выгоды и издержки. *Естественные* выгоды имманентно присущи внешнему государственному заимствованию; к ним можно отнести следующие:

1. Внешние госзаимствования являются дополнительным источником финансовых ресурсов при ограниченности рынка внутренних капиталов.
2. Привлеченные внешние займы позволяют временно решить вопрос о финансировании дефицита платежного баланса страны, способствуют временному улучшению курса национальной валюты, препятствуют оттоку золота за границу.
3. Внешние заимствования, в отличие от внутренних, не повышают внутреннюю ставку процента, поскольку они не влияют непосредственно на предложение капиталов внутри страны.

Реализация естественных выгод имеет место на относительно небольшом интервале времени, поэтому естественные выгоды относятся к кратковременным выгодам. Основной естественной издержкой внешнего долга является стоимость обслуживания долга или процент на ссудный капитал.

Существуют также дополнительные выгоды внешнего заимствования и дополнительные издержки внешнего госдолга. *Дополнительные* выгоды возникают в результате эффективного использования внешних заимствований. Дополнительные выгоды являются долгосрочными и определяются следующими факторами:

- рост промышленного потенциала страны-заемщика;
- стимулирование и расширение внешней торговли;
- укрепление национальной валюты;
- накопление государственных валютных резервов;
- улучшение платежного баланса;
- рост накопления в стране-заемщике.

Дополнительные издержки возникают вследствие неэффективного использования внешних заимствований и характеризуются следующими экономическими последствиями:

- замедление темпов экономического роста страны-заемщика;
- ухудшение внешней торговли;

- ухудшение платежного баланса;
- ослабление национальной валюты;
- уменьшение официальных валютных резервов;
- перекладывание долгового бремени на будущие поколения;
- экономическая и политическая зависимость страны-дебитора от страны-кредитора.

Основным признаком неэффективности финансовых методов использования внешнего госдолга является наступление долгового кризиса, который можно определить как состояние внешнего долга страны, при котором имеет место минимизация дополнительных выгод внешнего заимствования при максимизации естественных и дополнительных издержек внешнего госдолга.

Проблема государственного долга осложняется тем, что государство осуществляет выплаты по старым долгам и получает новые кредиты и займы. В большинстве случаев государство вынуждено прибегать к дополнительным кредитам и займам только для того, чтобы выполнить свои обязательства по старым долгам. Естественным образом встает проблема управления государственным долгом, которая должна решать следующие задачи:

1. Минимизация стоимости долга для государства.
2. Эффективное использование для экономики мобилизованных финансовых ресурсов.
3. Обеспечение своевременного возврата займов, в том числе урегулирование внешней задолженности в случае долгового кризиса.

12.2. Теорема эквивалентности Рикардо–Барро

Р. Барро рассматривал проблему оптимизации управления госдолгом в рамках равновесной динамической модели налогообложения с максимизацией функции благосостояния потребителя. Рассмотрим для простоты пример двухпериодной экономики: пусть для оживления экономики государство планирует снизить налоги в первом периоде. Если снижение налогов не сопровождается снижением государственных расходов, то в результате образуется бюджетный дефицит. Будем полагать, что этот дефицит покрывается за счет заимствования у населения (продажа государственных облигаций). Полагая начальный долг государства равным нулю ($D_0 = 0$), получаем балансовое соотношение для первого периода

$$G_1 + Tr_1 - T_1 = D_1 \tag{12.1}$$

где G — государственные расходы на приобретение товаров и услуг;

Tr —государственные трансферты частному сектору;

T — прямые налоги.

Во втором периоде к государственным расходам добавляются расходы по выплате и обслуживанию долга. При неизменном уровне цен, который мы примем за единицу, бюджетное ограничение во втором периоде примет вид:

$$G_2 + Tr_2 + (1 + r)D_1 - T_2 = D_2, \tag{12.2}$$

где r — ставка процента.

Полагая, что снижение налогов в первом периоде не сопровождается снижением государственных расходов G и Tr ни в одном периоде и что величина долга D_2 изменению не подлежит, получаем, что заимствования государства в первом периоде должны быть погашены в следующем периоде с процентами. Для этого государству во втором периоде придется повысить налоги, причем это повышение оказывается больше, чем первоначальное снижение. Действительно, из уравнения (12.1) получаем для изменений D и T:

$$\Delta D_1 = -\Delta T_1 > 0, \tag{12.3}$$

поскольку, как уже говорилось, $\Delta T_1 < 0$. Аналогично из (12.2) имеем

$$\Delta T_2 = (1 + r)D_1 = -(1 + r)\Delta T_1.$$

Таким образом, при неизменной расходной части бюджета изменения в налогах являются такими, что приведенная стоимость этих изменений равна нулю:

$$(1 + r)\Delta T_1 + \Delta T_2 = 0. \tag{12.4}$$

Поскольку приведенная стоимость налогов остается прежней, то и приведенная стоимость располагаемого дохода не меняется. Это свойство известно в экономической теории как «теорема эквивалентности Рикардо–Барро» (впервые такое предположение об «индифферентности» индивидуума по отношению к кредитному или налоговому финансированию государственных расходов было высказано еще Д. Рикардо).

Можно показать, что приведенный пример обобщается и на случай многих периодов. Таким образом, при выполнении ряда условий (рациональность экономических индивидуумов, равенство ставки процентов ставке процента по депозитам, равенство ставки процента для домохозяйств со ставкой процента для государства, паушальных налогов и трансфертов, отсутствие пирамиды) временная структура налогов не имеет значения. В этом случае для экономики имеет значение временная структура государственных расходов.

Теорема эквивалентности Рикардо–Барро, несмотря на большое количество упрощающих предположений, имеет существенное значение для качественного объяснения воздействия государственного долга на экономику страны. Однако для прогнозирования динамики внешнего и внутреннего государственного долга она не может быть использована. Для этой цели в последнее десятилетие были предприняты попытки построения различных моделей.

12.3. Системные исследования

12.3.1. Модель Домара

Одно из первых исследований границ постоянно растущей государственной задолженности было осуществлено Е. Домаром в 1944 г. Он проанализировал различные варианты развития экономической ситуации: национальный доход остается постоянным, увеличивается на постоянную абсолютную величину, растет с постоянным темпом, процентная ставка по государственным ценным бумагам резко возрастает (модель военного времени). Приведем случай, когда национальный доход растет с постоянным темпом, а удельный вес вновь образующейся государственной задолженности является постоянной величиной в национальном доходе. Тогда система основных соотношений модели имеет вид:

$$Y = Y_0 e^{rt}, \; D = D_0 + Y_0 \alpha \int_0^1 e^{rt} dt = D_0 + Y_0 \alpha (1 - e^{rt})/r, \tag{12.5}$$

$$D/Y = D_0 e^{-rt}/Y_0 + \alpha (1 - e^{-rt})/r, \tag{12.6}$$

$$\lim_{t \to \infty} (D/Y) = \alpha/r, \quad \lim_{t \to \infty} (U/T) = i/(r/a + i), \tag{12.7}$$

где Y — национальный доход;

D — государственный долг;

D_0 — дефицит бюджета;

i — средняя процентная ставка по государственным ценным бумагам;

$U = Di$ — процентные выплаты по государственному долгу;

$T = Y + U$ — налогооблагаемый доход;

U/T — налоговая ставка;

Y_0 — национальный доход в начальный момент времени;

α — удельный вес вновь образующейся государственной задолженности в национальном доходе;

r — темп роста национального дохода в процентах;

t — время в годах.

Е. Домар отмечает, что границы государственной задолженности необходимо рассматривать не по абсолютным величинам, а во взаимосвязи с другими макроэкономическими показателями — национальным доходом, ресурсами банковской системы, объемом частных ценных бумаг в обращении. Даже постоянное абсолютное увеличение государственного долга не обязательно обременяет бюджетно-налоговую политику в будущем. Как следует из соотношений (12.6) и (12.7), налоговая квота, необходимая для финансирования совокупной государственной задолженности, может оставаться постоянной или даже снижаться при абсолютном росте государственной задолженности.

Главной стратегической величиной является экономический рост. Чем выше темпы экономического роста и ниже реальные процентные ставки, тем больше возможность использования займов для финансирования государственных расходов. Согласно последнему соотношению (12.7), если уровень процентных ставок выше темпов роста национального дохода, то расходы по обслуживанию государственного долга превышают объем новых правительственных займов и даже могут стать тяжелым бременем для госбюджета.

12.3.2. Модели внешнего долга

Внешние заимствования играют особенно большую роль в экономике большинства стран, и потому проблема управления внешним долгом является одной из основных в экономических исследованиях.

Глубокое системное исследование факторов, влияющих на внешнюю платежеспособность государства заемщика, было осуществлено Д. Аврамовичем в 60-х гг. XX столетия. Модель Аврамовича сводится к системе следующих уравнений.

$$S_n = Y_0[S_0 + s((1+r)-1)], \quad I_n = KrY_0(1+r)^n, \tag{12.8}$$

$$F_n = I_n - S_n = Y_0[(Kr-s)(1+r)^n - (S_0 - s)], \tag{12.9}$$

$$\begin{gathered} D_n = Y_0\{(Kr-s)[(1+i)^{n+1} - \\ -(1+r)^{n+1}]/(i-r) - (S_0-s)[(1+i)^{n+1}-1]/i\}. \end{gathered} \tag{12.10}$$

В соотношениях (12.8)–(12.10) приняты следующие обозначения:

Y — объем ВВП; r — темп роста ВВП; S — внутренние сбережения; S_0 — внутренние сбережения в начальный момент времени; s — предельная ставка сбережений (полагается постоянной долей в росте ВВП); I — инвестиции; K — внутренняя ставка доходности (предполагается лаг в один год между инвестициями и получением дохода); F — чистый приток капитала; D — внешний долг в конце года; i — средняя процентная ставка по внешнему долгу; n — номер периода (года).

Система соотношений (12.8)–(12.10) связывает воедино инвестиции, внешний долг, динамику ВВП и внутренние сбережения. На основе этой модели Д. Аврамович указал на два важных экономических аспекта: во-первых, вопросы обслуживания внешнего долга не могут быть отделены от общей проблемы экономического роста; во-вторых, серьезная оценка кредитоспособности страны не может быть основана на анализе краткосрочного периода.

В качестве результативной разработки в области моделирования внешнего долга следует отметить созданную в Мировом банке RMSM-модель, позволяющую осуществлять прогноз потребности страны во внешних заимствованиях и ее платежеспособности по их обслуживанию. Эта модель построена по принципу межотраслевого баланса; она довольно громоздка и плохо анализируема. Модель работает в режиме «черного ящика», когда нельзя даже приблизительно предсказать, что будет на выходе. Модель полезна прежде всего для самого Всемирного банка как кредитора в качестве инструмента для выработки обоснованных рекомендаций и стратегий финансовой политики по определению стран-заемщиков и аспектов предоставления им внешних займов.

12.4. Дифференциальные модели

Поскольку фактор времени является существенным в динамике государственного долга, то в исследованиях этой проблемы вполне естественным является использование аппарата обыкновенных дифференциальных уравнений, что традиционно для системной динамики.

Одной из первых попыток формализации динамики государственного долга в отечественной экономической литературе является модель, разработанная в 1991 г. Л. Соколовским. В модели используются естественные балансовые соотношения. Дефицит госбюджета D, государственные расходы G, процентная ставка i, долг по государственным ценным бумагам B и налоговые поступления T в бюджет связаны уравнением

$$D = G + iB - T.$$

При допущении пропорциональности суммы налоговых сборов доходу налогоплательщиков Y с налоговой ставкой τ имеем $T = \tau\,(Y + iB)$, и тогда это уравнение принимает вид

$$D = G + i\,(1 - \tau)B - \tau Y. \qquad (12.11)$$

Здесь $i\,(1 - \tau)$ — процентная ставка после уплаты налогов.

Поскольку бюджетный дефицит финансируется за счет государственного долга и денежной эмиссии, то справедливо соотношение

$$D = B' + M', \qquad (12.12)$$

где M — номинальная денежная масса в обращении, а штрих означает производную по времени. Нормирование абсолютных величин по ВНП (Y) в уравнениях (12.11) и (12.12) приводит к уравнениям в безразмерном виде:

$$d = g + i\,(1 - \tau)b - \tau; \qquad (12.13)$$

$$d = (B' + M')/Y, \qquad (12.14)$$

где $d = D/Y$, $g = G/Y$, $b = B/Y$.

Так как $b + m = (B + M)/Y$, то $b' + m' = [(B' + M')Y - (B + M)Y']/Y^2$, откуда получаем, что

$$(B' + M')/Y = b' + m' + (b + m)(\rho + \pi), \qquad (12.15)$$

где $m = M/Y$, а Y'/Y — номинальный темп роста ВНП, равный сумме реального темпа роста ρ и темпа инфляции π. Из соотношений (12.13)–(12.15) получаем обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка:

$$b' + m' = (g - \tau) + (r - \rho)b - (\rho + \pi)m, \qquad (12.16)$$

где $r = i(1 - \tau) - \pi$ – реальная ставка процента после уплаты налога. Уравнение (12.16) описывает динамику внутреннего госдолга с учетом основных параметров фискальной и кредитно-денежной политики. Модель, основой которой является уравнение (12.16), описывает общий механизм покрытия бюджетного дефицита как за счет новых заимствований, так и за счет денежно-кредитной эмиссии.

Когда величина денежной массы поддерживается на постоянном уровне, имеем частный случай уравнения (12.16)

$$b' = (g - \tau) + (r - \rho)b - (\rho + \pi)m. \tag{12.17}$$

Если же количество денег в обращении растет тем же темпом, что и ВНП, то из уравнений (12.14) и (12.16) получаем:

$$b' = d - (\rho + \pi)(b + m). \tag{12.18}$$

Согласно этому уравнению, если относительный бюджетный дефицит поддерживается на уровне $d_0 = (\rho + \pi)(b + m)$, то относительный государственный долг остается неизменным. Если же дефицит бюджета по отношению к ВНП превышает уровень d_0, то относительная величина госдолга возрастает.

Из приведенной модели вытекает следующее. Влияние государственного долга на экономику страны в значительной мере определяется экономической конъюнктурой. Если экономика развивается стабильно и темпы роста долга не превышают темпов роста ВНП, то обслуживание долга происходит за счет налогов и заимствования средств при отсутствии инфляционных тенденций. Если же в целях обслуживания долга заимствование средств приобретает устойчивый и постоянный характер, то рано или поздно появляется необходимость в регулярной монетизации долга, что создает предпосылки инфляции. Инфляционные тенденции начинают появляться, когда темпы роста долга опережают темпы роста государственных доходов, которые, в свою очередь, при неизменных налоговых ставках не могут превышать долговременные темп увеличения номинального дохода. Таким образом, возникает верхняя граница темпов роста государственного долга.

На основе дифференциальной модели, аналогичной приведенной, О. О. Замковым были получены относительно простые и удобные формулы связи первичного и общего дефицита бюджета и государственного долга в долгосрочном периоде с учетом реальных процентных ставок по государственному долгу и темпов роста ВВП. Основное уравнение имеет вид:

$$D_t = D_0 + [Y_0 q(1 + p/100)((1 + p/100)^t - 1)]/p, \qquad (12.19)$$

где D — государственный долг в год t;

D_0 — начальный объем госдолга;

Y_0 — начальный уровень ВВП;

q — доля общего дефицита бюджета (включая выплату процентов по долгу и основного долга);

p — годовой темп прироста ВВП.

Эта формула позволяет выполнить ряд важных оценок: определение допустимого уровня бюджетного дефицита по отношению к ВВП при заданных уровне государственного долга и прогнозе роста ВВП; нахождение требуемого темпа роста для выхода на заданное значение госдолга при данном уровне бюджетного дефицита в долгосрочном периоде (все измеряется в процентах к ВВП); определение периода времени, необходимого для выхода к данным значениям рассматриваемых параметров.

Похожее уравнение позволяет связать совместимость бюджетно-налоговой политики с уровнем процентной ставки по государственным обязательствам:

$$D_t = D_0(1 + i/100)^t + Y_0 q[(1 + p/100)^t - (1 + i/100)^t]/(p - i). \qquad (12.20)$$

где i — процентная ставка выплат по государственному долгу.

Если ставка процента i не меньше темпа роста ВВП (т. е. $i \geq p$), то по отношению к ВВП долг неограниченно возрастает, и данная траектория экономики не сможет поддерживаться из-за невозможности обслуживания государственного долга. По сути дела эта оценка позволяет проводить анализ бюджетно-налоговой политики на длительную перспективу. В данной модели отсутствует монетарный фактор; кроме того, как и в предыдущей модели, речь идет только о внутреннем долге.

В более поздних модифицированных моделях их авторы дополняли систему критериев оценки состояния государственного долга с введением связей между его внутренней и внешней составляющими и разделением на краткосрочные, средне- и долгосрочные займы.

12.5. Разностные модели

В последнее время в проблеме моделирования государственного долга страны наиболее употребимыми оказались модели, основанные на разностных уравнениях. Наиболее перспективной с методической и теоретической точек зрения является модель, разработанная Е. В. Балацким, поскольку в ней учитываются практически все наиболее важные компоненты бюджетного дефицита и статьи их покрытия, внутренний и внешний государственный долг рассматриваются совместно в их взаимодействии.

В более поздних разработках других авторов была предложена модифицированная разностная модель, включающая в себя ряд других важных экономических параметров со статистическими зависимостями между ними.

12.5.1. Основные соотношения модели

Основные балансовые соотношения принимаются такими

$$D_t = G_t - T_t + L_t, \tag{12.21}$$

где D_t — полный бюджетный дефицит;

G_t — государственные расходы без обслуживания госдолга;

T_t — государственные доходы (налогообложение);

L_t — платежи по накопленным к моменту времени t долгам.

Эти платежи включают в себя как уплату по процентам (r_t и r_t^0 — относительные процентные ставки по внутреннему и внешнему долгам соответственно), так и оплату самих долгов (с нормами амортизации w_t и w_t^0):

$$L_t = (r_t + w_t)B_{t-1} + \varepsilon_t(r_t^0 + w_t^0)B_{t-1}^0, \tag{12.22}$$

где B и B^0 — соответственно внутренний и внешний долг страны;

ε — валютный курс.

Сумма общего госдолга на момент времени t имеет вид

$$B_t + \varepsilon_t B_t^0 = (1 - w_t)B_{t-1} + \varepsilon_t(1 - w_t^0)B_{t-1}^0 + Z_t + \varepsilon_t Z_t^0, \tag{12.23}$$

где Z_t и Z_t^0 — новые внутренние и внешние заимствования. Покрытие дефицита D_t присходит за счет денежно-кредитной эмиссии E_t, а также за счет новых заимствований Z_t и Z_t^0, т. е.

$$D_t = E_t + Z_t + \varepsilon_t Z_t^0. \tag{12.24}$$

Введем в рассмотрение еще два параметра: β_t — долю внешнего долга, конвертируемую в национальную валюту (и/или погашаемую товарным покрытием), и γ_t — часть национального долга, подлежащую списанию. Экономическая целесообразность введения этих параметров вполне понятна. Тогда уравнения (12.22) и (12.23) можно переписать в виде:

$$L_t = (r_t + w_t)(B_{t-1} + \beta_t \varepsilon_t B_{t-1}^0) + \varepsilon_t (r_t^0 + w_t^0)(1 - \beta_t - \gamma_t) B_{t-1}^0, \tag{12.25}$$

$$B_t + \varepsilon_t B_t^0 = (1 - w_t)(B_{t-1} + \beta_t \varepsilon_t B_{t-1}^0) + \\ + \varepsilon_t (1 - w_t^0)(1 - \beta_t - \gamma_t) B_{t-1}^0 + Z_t + \varepsilon_t Z_t^0. \tag{12.26}$$

Приравнивая правые части уравнений (12.21) и (12.24), получаем с учетом (12.25) и (12.26):

$$G_t - T_t + (1 + r_t)(B_{t-1} + \beta_t \varepsilon_t B_{t-1}^0) + \\ + \varepsilon_t (1 + r_t^0)(1 - \beta_t - \gamma_t) B_{t-1}^0 = E_t + B_t + \varepsilon_t B_t^0. \tag{12.27}$$

Введем следующие безразмерные переменные (нормированные по отношению к Q_t — величине ВВП), с учетом того, что $Q_t = P_t X_t$ (P — средний уровень цен, X — объем выпуска в натуральном выражении): $Y_t = B_t / Q_t$, $Y_t^0 = \varepsilon_t B_t^0 / Q_t$ — относительные величины внутреннего и внешнего долга в национальной валюте, x_t — темп роста выпуска, π_t — темп инфляции, δ_t — темп роста реального курса валюты (доллара), $\lambda_t = g_t - \theta_t$ — относительный первичный дефицит (разность между государственными расходами и государственными доходами), λ_t^s — доля совокупного бюджетного дефицита в ВВП, α_t — доля совокупного бюджетного дефицита, финансируемого за счет кредитно-денежной эмиссии Центрального банка.

Тогда из уравнения (12.27) получаем разностное уравнение первого порядка для Y_t и Y_t^0 в совокупности:

$$Y_t + Y_t^0 = \frac{1 + r_t}{(1 + x_t)(1 + \pi_t)} Y_{t-1} + \frac{1 + \delta_t}{(1 + x_t)(1 + \pi_t)} [(1 + r_t)\beta_t + \\ + (1 + r_t^0)(1 - \beta_t - \gamma_t)] Y_{t-1}^0 + (\lambda_t - \alpha_t \lambda_t^s). \tag{12.28}$$

Примем, что бюджетно-эмиссионный процесс разделяется на две части соответственно обслуживанию внутреннего и внешнего долга по отдельности с коэффициентом расщепления μ_t. Тогда получим уравнения динамики отдельно для внутреннего и внешнего долга:

$$Y_t = \frac{1 + r_t}{(1 + x_t)(1 + \pi_t)} Y_{t-1} + \beta_t \frac{(1 + r_t)(1 + \delta_t)}{(1 + x_t)(1 + \pi_t)} Y_{t-1}^0 + \\ + \mu_t (\lambda_t - \alpha_t \lambda_t^s), \tag{12.29}$$

$$Y_t^0 = \frac{(1+r_t^0)(1+\delta_t)(1-\beta_t-\gamma_t)}{(1+x_t)(1+\pi_t)} Y_{t-1}^0 + (1-\mu_t)(\lambda_t - \alpha_t \lambda_t^s). \tag{12.30}$$

Уравнения (12.29) и (12.30) составляют основу модели динамики внутренней и внешней компонент государственного долга. Заметим, что уравнение для внутреннего долга (12.29) «зацеплено» с уравнением (12.30) через долю внешнего долга, конвертируемую в национальную валюту. Уравнение динамики внешнего долга (12.30) не зависит явно от функции относительной величины внутреннего долга Y_t.

Соотношения (12.29) и (12.30) представляют собой систему двух линейных неоднородных разностных уравнений первого порядка с переменными коэффициентами. В эти уравнения входят неизвестные сеточные функций Y и Y^0 с областью определения на равномерной сетке

$$\omega = \{t_1 = ih, \ \ i = 0, 1, ..., n\}. \tag{12.31}$$

На этой же сетке определены входящие в уравнения (12.29) и (12.30) коэффициенты, как известные сеточные функции.

12.5.2. Качественный анализ модели

Система уравнений (12.29) и (12.30) в общем виде при условии задания входящих в нее параметров (экзогенных переменных) может быть решена только численно. Между тем, представляет интерес качественный анализ, который может быть проведен с упрощенным видом этой системы, а именно — в предположении о том, что входящие в нее коэффициенты и свободные члены являются постоянными величинами. Такое предположение равносильно введению в рассмотрение усредненных величин для входящих в систему (12.29), (12.30) параметров. Предлагаемый анализ имеет самостоятельное экономическое значение.

Система уравнений (12.29)–(12.30) в упрощенной форме имеет вид

$$Y_t = \frac{1+r}{(1+x)(1+\pi)} Y_{t-1} + \beta \frac{(1+r)(1+\delta)}{(1+x)(1+\pi)} Y_{t-1}^0 + \mu(\lambda - \alpha\lambda^s). \tag{12.32}$$

$$Y_t^0 = \frac{(1+r^0)(1+\delta)(1-\beta-\gamma)}{(1+x)(1+\pi)} Y_{t-1}^0 + (1-\mu)(\lambda - \alpha\lambda^s). \tag{12.33}$$

Решение неоднородного разностного уравнения (12.33) легко находится стандартными методами; оно определяется формулой:

$$Y_t^0 = C_1 (a_1)^t + (1 - \mu(\lambda - \alpha\lambda^s))/(1 - a_1), \tag{12.34}$$

где

$$a_1 = \frac{(1 + r^0)(1 + \delta)(1 - \beta - \gamma)}{(1 + x)(1 + \pi)}. \qquad (12.35)$$

Подстановка выражения (12.34) в уравнение (12.32) с последующим его решением приводит к формуле для функции внутреннего долга Y_t:

$$Y_t = C_2\left[\frac{1 + r}{(1 + x)(1 + \pi)}\right]^t + a_2\beta(1 + \delta)[C_1(a_1)^{t-1}/(a_1 - a_2) +$$

$$+ (1 - \mu)(\lambda - \alpha\lambda^s)/(1 - a_1)] + \mu(\lambda - \alpha\lambda^s), \qquad (12.36)$$

где

$$a_2 = \frac{1 + r}{(1 + x)(1 + \pi)}. \qquad (12.37)$$

В формулах (12.34) и (12.36) C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Обратимся теперь к анализу полученных решений для внешнего и внутреннего долга.

1. Проанализируем сначала полученное решение для величины внешнего долга (12.34). Дихотомия различных режимов (сочетаний значений параметров r^0, δ, x, π, β и γ) для функции внешнего долга имеет место при $a_1 = 1$. Здесь различаются два режима. В первом случае $a_1 > 1$, т. е. имеет место неограниченный рост функции (12.34) во времени, поскольку из формулы (12.34) следует:

$$C_1 = Y_0^0 + (1 - \mu(\lambda - \alpha\lambda^s))/(a_1 - 1) > 0, \qquad (12.38)$$

где Y_0^0 — начальное значение функции Y_t^0 причем $Y_0^0 \geq 0$. Анализ влияния экономических параметров здесь достаточно прозрачен. Малые темпы роста выпуска при отсутствии списания долгов и перевода их части в национальную валюту совместно с высоким темпом роста валютного курса приводят к быстрому увеличению суммы внешнего долга. Большой интерес представляет второй случай, когда

$$a_1 = \frac{(1 + r^0)(1 + \delta)(1 - \delta - \gamma)}{(1 + x)(1 + \pi)} < 1. \qquad (12.39)$$

Здесь имеет место устойчивый режим с графиками функций Y_t^0, стремящимися во времени к предельному состоянию — значению $Y_{\lim}^0$:

$$t \to \infty, \quad Y_t^0 \to Y_{\lim}^0 = (1 - \mu(\lambda - \alpha\lambda^s))/(1 - a_1). \qquad (12.40)$$

Условие (12.39) может быть обеспечено двумя способами: либо высоким темпом роста выпуска x (при этом возможен и высокий темп роста инфляции π) в сочетании с относительно низкой ставкой процента x^0; либо при низком значении темпа роста валютного курса δ с высоким темпом инфляции. Именно второй сценарий осуществлялся в экономике России с 1993 г. по август 1998 г., когда искусственно низкий курс доллара сопровождался неудержимым ростом цен при снижении объема выпуска; это закончилось дефолтом.

Проанализируем выражение в правой части (12.40), определяющее предельное значение относительной величины внешнего долга. Видно, что чем меньше значение a_1, тем меньше Y^0_{lim}. Как следует из формулы (12.35), этому способствует уменьшение ставки процента r^0, а также увеличение доли внешнего долга, конвертируемой в национальную валюту, и увеличение доли списания γ внешнего долга. Снятие лимитного ограничения, т. е. достижение условия

$$Y^0_{\text{lim}} = 0,$$

приводит, в свою очередь, к условию

$$\mu = 1/(\lambda - \alpha\lambda^s),$$

а это невозможно при естественных ограничениях $0 < \mu < 1$, $\lambda < 1$ и $\lambda^s < 1$. Иными словами, внешний долг, однажды возникнув, уже не исчезает при наличии совокупного дефицита госбюджета.

Здесь уместно привести мнение А. Смита, высказанное им в работе «Исследование о причинах и природе богатства народов» в 1776 г. «Политика государственной задолженности постепенно ослабляла государство, которое ею воспользовалось. Там, где государственный долг однажды превысил определенный уровень, почти никогда не удавалось, насколько мне известно, его справедливым образом или полностью погасить».

Характер динамики функции внешнего долга показан на рис. 12.1. При условии (12.39), в том случае, если $Y^0_0 > Y^0_{\text{lim}}$, кривые стремятся к предельному значению сверху; если же $Y^0_0 < Y^0_{\text{lim}}$, все кривые лежат ниже асимптоты $Y^0_0 = Y^0_{\text{lim}}$.

2. Теперь обратимся к анализу функции относительного внутреннего долга — формулы (12.36), (12.35) и (12.37). Условием дихотомии, как следует из вида решения (12.36), здесь является система соотношений:

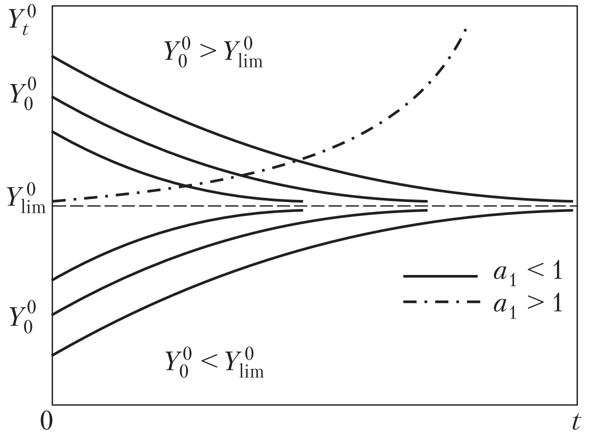


Рис. 12.1

$$1 + r = (1 + x)(1 + \pi), \quad a_1 < 1. \tag{12.41}$$

А. Рассмотрим сначала случай, когда

$$1 + r > (1 + x)(1 + \pi). \tag{12.42}$$

Условие (12.42) означает, что ставка процента обслуживания внутреннего долга превышает суммарный и мультипликативный эффект инфляции и темпа роста выпуска (что имело место в период, предшествующий дефолту: огромные проценты по ГКО предопределили обвал экономики России). Укажем возможность следующих возможных вариантов динамики внутреннего долга Y_t, обусловленных различными сочетаниями значений параметров задачи. Здесь определяющим является критическое значение:

$$Y_{cr} = \beta(1+\delta)(1+x)(1+\pi)\left[\frac{1-\mu(\lambda - \alpha\lambda^s)}{(1+x)(1+\pi)-(1+r^0)(1+\delta)(1-\beta-\gamma)} - \right.$$

$$\left. - \frac{C_1}{a_1}\frac{1}{(1+r)-(1+r^0)(1+\delta)(1-\beta-\gamma)}\right], \tag{12.43}$$

где C_1 определяется формулой (12.38). В том случае, когда начальное значение Y_0 внутреннего долга превышает критическое значение Y_{cr}, имеет место неограниченный рост Y_t во времени. Такой сценарий соответствует отсутствию платежеспособности государства по внутреннему долгу. Если же сочетание значений параметров, входящих в решение (12.36), таково, что выполняется неравенство $Y_0 < Y_{cr}$, то имеет место быстрое снижение внутреннего долга во времени (рис. 12.2).

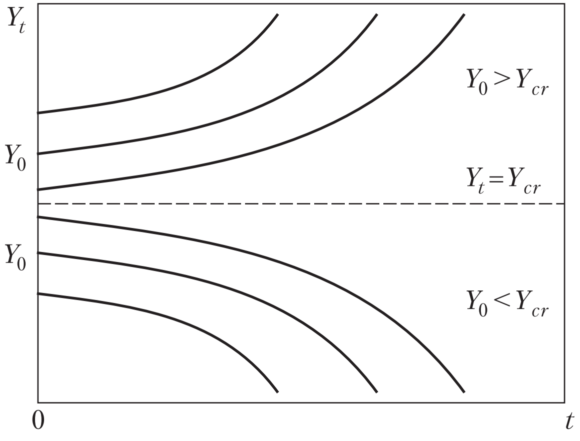


Рис. 12.2

Б. Как следует из вида решения (12.36), случай

$$1 + r < (1 + x)(1 + \pi), \;\; a_1 > 1 \tag{12.44}$$

при наличии конверсии части внешнего долга в национальную валюту ($\beta > 0$) однозначно приводит к быстрому росту внутреннего долга из-за возрастания внешнего долга (в силу неравенства (12.38)).

В. Условия

$$1 + r < (1 + x)(1 + \pi), \;\; a_1 < 1 \tag{12.45}$$

определяют устойчивое стремление кривых динамики внутреннего долга к предельному значению:

$$t \to \infty, \;\; Y_t \to Y_{\lim} = \beta \frac{(1 + r)(1 + \delta)(1 - \mu(\lambda - \alpha\lambda^s))}{(1 + x)(1 + \pi)(1 - a_1)} + \mu(\lambda - \alpha\lambda^s). \tag{12.46}$$

Асимптота $Y_t = Y_{\lim}$ разделяет два семейства кривых: при $Y_0 > Y_{\lim}$ кривые расположены выше нее, при $Y_0 < Y_{\lim}$ кривые стремятся к предельному значению снизу (рис. 12.3). Из первого условия (12.45) следует, что относительно низкая ставка процента обслуживания внутреннего долга должна сочетаться с заметным темпом роста выпуска и умеренной инфляцией (быстрый темп инфляции автоматически обусловливает высокую ставку процента r).

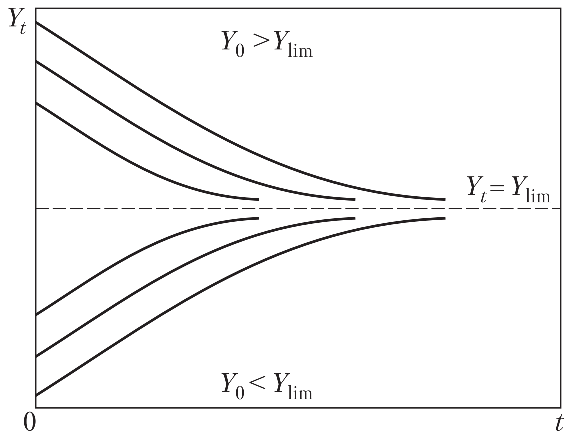


Рис. 12.3

Нетрудно видеть, что предельное значение внутреннего долга, определяемое формулой (12.46), существенно зависит от «нагрузки» конверсионной части внешнего долга (параметр β); второе слагаемое в (12.46) характеризует покрытие первичного и совокупного бюджетного дефицита. Снижению значения Y_{lim} способствуют уменьшение ставки процента внутреннего долга и темпа роста валютного курса, увеличение темпа роста выпуска, а также списание части внешнего долга. Немаловажное значение имеет и снижение ставки процента r^0. Что касается снятия лимитного ограничения, то из условия

$$Y_{\text{lim}} = 0 \tag{12.47}$$

следует необходимость выполнения двух условий:

$$\lambda - \alpha\lambda^s < 0, \tag{12.48}$$

$$\mu = \frac{\beta(1+r)(1+\delta)}{[(1+x)(1+\pi)(1-a_1) - \beta(1+r)(1+\delta)](\alpha\lambda^s - \lambda)} < 1. \tag{12.49}$$

Условие (12.48) означает, что финансирование совокупного бюджетного дефицита за счет кредитно-денежной эмиссии либо должно превышать первичный бюджетный дефицит λ, либо $\lambda < 0$ (случай профицита). Тогда из неравенства (12.49) также следует, что при достаточно малых ставках процентов r и r^0, невысоких темпах роста валютного курса δ (а значит и невысоких темпах инфляции π) и значительных темпах роста выпуска x условие (12.47) может быть выполнено.

Чувствительность предельного значения $Y_{\lim}$ на изменения основных параметров модели можно исследовать также, как и в случае внешнего долга — по функциональной зависимости (12.46).

Наконец, из общего вида решений (12.34)–(12.37) непосредственно следует, что конверсионный перевод части внешнего долга в национальную валюту выгоден, когда $r < r^0$ — ставка процента по внутреннему долгу меньше ставки процента по внешнему долгу — в этом случае бремя обслуживания общего государственного долга, как сумма внешнего и внутреннего долга, снижается. Это актуально в тот период времени, когда на мировом финансовом рынке имеются достаточно большие объемы свободных ресурсов.

12.5.3. Платежеспособность государства по долгам

Платежеспособность — это долгосрочная концепция, позволяющая проводить оценку как финансового положения страны-дебитора, так и ее способности выплачивать долги в будущем. Вообще говоря, для этого необходимо увязывать долгосрочный прогноз будущих доходов государства-должника с состоянием его ресурсной базы. В терминах приведенной выше модели платежеспособность государства означает устойчивое стремление государственного долга к некоторому стационарному состоянию, т. е. когда кривая динамики долга стремится к некоторой горизонтальной асимптоте. Рассмотрим отдельно платежеспособность государства по внешнему и внутреннему долгам.

Случай, когда величина a_1, определяемая формулой (12.35), удовлетворяет условию $a_1 > 1$, как уже говорилось выше, соответствует неограниченному росту внешнего долга во времени. Такой сценарий описывает практическое отсутствие платежеспособности государства по внешнему долгу, что видно на графике (кривая 2 на рис. 12.1).

1. Внешний долг. Поскольку условие (12.39) означает устойчивое снижение во времени величины внешнего долга к предельному значению $Y_{\lim}^0$, то указанные на рис. 12.1 сценарии соответствуют платежеспособности государства по внешнему долгу, т. е. условие (12.39)

$$a_1 < 1$$

можно считать ее критерием.

Что касается влияния параметров на платежеспособность государства по внешнему долгу, то его можно несложным образом определить из формулы (12.35), определяющей зависимость динамики внешнего долга от параметров модели — в первую очередь от ставки процента по внешнему долгу r^0, темпа роста курса иностранной валюты долга δ, темпа роста выпуска x и темпа инфляции π. Для этого достаточно найти частные производные декремента функции внешнего долга — функции a_1 (r^0, δ, x, π) по указанным параметрам и исследовать поведение этой функции как ее чувствительность на их изменения (например, определить частные эластичности декремента a_1). Зная экономические тенденции конкретной страны, можно составить качественный прогноз ее платежеспособности с определенными количественными оценками.

2. Внутренний долг. Здесь возможны два варианта платежеспособности государства. В первом из них, как следует из анализа поведения решения — функции внутреннего долга, когда соблюдается условие (12.42) (ставка процента обслуживания внутреннего долга превышает суммарный и мультипликативный эффект инфляции и темпа роста выпуска) и при соблюдении также условия $a_1 > 1$ критерием платежеспособности государства по внутреннему долгу является условие

$$Y_0 < Y_{cr}.$$

Второй вариант критерия платежеспособности государства по внутреннему долгу — это когда имеет место устойчивая траектория с выходом на предельное значение $Y_{\lim}$ согласно соотношениям (12.46). В этом случае условия (12.45) являются критерием платежеспособности государства по внутреннему долгу.

Чувствительность величин Y_{cr} и $Y_{\lim}$, к параметрам задачи может быть исследована так же, как и для внешнего долга.

Приведенные условия платежеспособности государства по долгам являются долгосрочными. Наряду с долгосрочными условиями существует еще и жесткое условие платежеспособности государства, которое заключается в стабилизации величины внешнего долга в одном отдельно взятом периоде:

$$\Delta B_t^0 = 0. \tag{12.50}$$

Из условия (12.50) следует, что государство платежеспособно, если первичный излишек счета текущих операций достаточен для выплат по обслуживанию внешнего долга.

12.5.4. Параметрический анализ модели

В этом разделе целесообразно затронуть вопросы, которые представляют интерес как для моделирования динамики госдолга, так и для теоретических исследований свойств самой модели (которые, впрочем, имеют непосредственное отношение к практическим аспектам моделирования). Эти вопросы подразделяются на три группы. Перечислим их.

1. Параметры, входящие в сформулированную общую модель (12.28)–(12.30), целесообразно разбить на следующие три группы.

А. Группа «жестких» параметров, определяемых состоянием экономики государства. К ним можно отнести:

$$x_t,\ \pi_t,\ \lambda_t. \tag{12.51}$$

Б. Группа «управляемых» параметров, которые можно изменять в определенных пределах, допускаемых функционированием основных институтов государства:

$$r_t,\ \delta_t,\ \alpha_t,\ \mu_t. \tag{12.52}$$

В. Группа договорно-политических параметров:

$$r_t^0,\ \beta_t,\ \gamma_t,\ \lambda_t^s. \tag{12.53}$$

Последний параметр этой группы определяет совокупный бюджетный дефицит, а значит и размер внутреннего и внешнего заимствований.

Указанное выше разделение параметров модели помогает правильно и оптимальным образом определять стратегию моделирования управления динамикой государственного долга, «проигрывать» реальные сценарии не только в экономическом, но и в политическом плане, вырабатывать конкретные рекомендации в управлении государственной задолженностью.

2. Логично полагать, что не все из указанных параметров (12.51)–(12.53) являются независимыми. Этот аспект представляется важным как при выборе сценариев моделирования, так и в установлении функциональных взаимозависимостей параметров. С этой точки зрения следует критически относиться к выбору некоторых исходных сценариев моделирования, приводимых в экономической литературе.

Следует полагать, что существуют взаимосвязи следующих видов.

2.1. Между темпом роста выпуска и первичным дефицитом:

$$\lambda_t = \lambda(x_t). \tag{12.54}$$

Уменьшение выпуска продукции приводит к снижению доходов бюджета. С другой стороны, действует и обратная связь. Дефицит бюджета страны приводит к сокращению многих экономически и социально необходимых расходных статей бюджета, таких как государственные инвестиции в промышленность, энергетику и строительство, национальная оборона, фундаментальные исследования и содействие научно-техническому прогрессу, сельское хозяйство, образование, медицина, что ведет к снижению ВВП и усилению проблемы дефицита бюджета.

Так, в 1997 г. в связи со значительным дефицитом бюджета в России был разработан механизм секвестирования расходов бюджета. Согласно принятым решениям, секвестированию не подлежали только расходы по обслуживанию государственного долга. В результате усилилась начавшаяся с конца 80-х гг. XX столетия неконтролируемая цепная реакция спада: в 1998 г. реальный объем ВВП снизился на 5,5% объемы импорта и экспорта упали на 25 и 17% соответственно. Проблема дефицита бюджета еще более усугубилась.

2.2. Между темпом инфляции и ставкой процента по внутреннему долгу:

$$r_t = r(\pi). \tag{12.55}$$

Безусловно, чем выше темп инфляции, тем выше должна быть ставка процента по внутреннему долгу для привлечения инвесторов. Однако несмотря на значительное снижение уровня инфляции в России в 1996 г., реальные ставки доходности по государственным ценным бумагам (в первую очередь ГКО–ОФЗ) оставались достаточно высокими. Наращивание эмиссии долговых обязательств в этот период с целью покрытия растущего дефицита госбюджета инициировало увеличение уровня доходности, в результате чего реальная доходность снижалась более медленно, чем инфляция, обусловливая рост реальной стоимости обслуживания государственного долга.

2.3. Между коэффициентом распределения бюджетно-эмиссионного покрытия совокупного бюджетного дефицита и темпом роста выпуска:

$$\mu_t = \mu(x_t). \tag{12.56}$$

Как источник мобилизации дополнительных ресурсов и увеличения финансовых возможностей, государственные займы являются важным фактором ускорения темпов социально-экономического развития страны при условии грамотной политики в отношении госдолга. В экономической теории преобладает точка зрения, что покрытие дефицита бюджета за счет выпуска долговых обязательств предпочтительнее денежной эмиссии. В то же время необходимо учитывать, что при этом государственные внутренние займы расширяют спрос на деньги, поднимают процентную ставку и, таким образом, вытесняют значительное количество частных капиталовложений (эффект crowding out), что может привести к снижению выпуска продукции.

2.4. Между долей совокупного бюджетного дефицита, финансируемого за счет денежно-кредитной эмиссии, и темпом роста выпуска:

$$\alpha_t = \alpha\,(x_t). \tag{12.57}$$

Одним из ключевых является вопрос о связи между эмиссией, инфляцией и экономическим ростом. Практика показывает, что далеко не всегда эмиссия вызывает инфляцию и тормозит экономический рост. По М. Фридману, объем производства обусловлен как денежной массой, так и другими факторами экономического роста. Следовательно, в определенных условиях увеличение инфляции может оказать позитивное воздействие на экономический рост.

2.5. Между темпом инфляции и темпом роста валютного курса:

$$\delta_t = \delta\,(\pi_t). \tag{12.58}$$

Увеличение темпов инфляции вызывает снижение курса национальной валюты.

Использование зависимостей (12.54)–(12.58) сохраняет линейность моделей (12.28)–(12.30), (12.34)–(12.37); усложняются лишь параметрические зависимости коэффициентов, входящих в эти уравнения и соотношения. Тем не менее это означает, что в выборе различных исходных сценариев нельзя свободно сканировать все параметры (12.51)–(12.53): по крайней мере пять из них, согласно зависимостям (12.53)–(12.57), являются расчетными величинами. Это обстоятельство способствует уменьшению размерности области выбора исходных сценариев.

Можно с определенной степенью уверенности предположить, что существуют и взаимозависимости параметров третьей группы (12.53) от макроэкономических параметров экономики государства. К ним следует отнести следующие зависимости.

2.6. Между долей внешнего долга, конвертируемой в национальную валюту, и темпами роста выпуска и инфляции:

$$\beta_t = \beta\,(x_t,\ \pi_t). \tag{12.59}$$

Здесь имеются в виду прежде всего операции конверсии долг/акции. Сторонники свопов долг/акции утверждают, что такой своп позволяет одновременно решить две проблемы: уменьшить государственный долг и обеспечить приток капитала в реальный сектор экономики. Действительно, процесс перевода долга дает стране-дебитору возможности сократить объем или снизить темпы роста внешнего долга. Появляется возможность перейти от потери процентов по долгам к отсроченным и менее строгим выплатам, которые сопровождаются частными инвестициями. Однако операции конверсии своп/акции могут иметь инфляционные последствия, если они поставят должника перед необходимостью влить в экономику слишком много новых денежных средств. Опыт Бразилии показывает, что конверсия в условиях сильной инфляции и большого дефицита бюджета может обострить и без того серьезные экономические проблемы.

2.7. Между долей списания внешнего долга и темпами роста выпуска и инфляции:

$$\gamma_t = \gamma\,(x_t,\ \pi_t). \tag{12.60}$$

Подобная акция облегчает положение стран-должников посредством уменьшения не только их будущих выплат, но и затрат и штрафных выплат по оставшейся части долга. Однако для стран-дебиторов существует опасность, связанная с увеличением рыночной стоимости части, оставшейся после списания части долга. Обычно такие мероприятия в крупных масштабах носят разовый (импульсный) характер.

2.8. Между ставкой процента по внешнему долгу и темпами роста выпуска и инфляции:

$$r_t^0 = r^0(x_t,\ \pi_t). \tag{12.61}$$

Очевидно, что чем выше ставки процента по внешнему долгу, тем тяжелее долговое бремя и меньше возможностей для экономического роста. Тем не менее следует подчеркнуть, что внешние заимствования, в отличие от внутренних, не вызывают эффекта вытеснения частных инвестиций (crowding out). Кроме того, ставка процента по внешнему долгу часто зависит от экономики страны-дебитора, а значит и от ее платежеспособности.

Функциональные связи (12.54)–(12.61) могут быть установлены как из общих теоретических представлений, так и путем статистической обработки базы экономических данных. Будучи «загруженными» в модели (12.34), (12.36) и (12.28)–(12.30), эти связи будут способствовать получению более обоснованных выводов и количественных результатов. Разумеется, эти связи представляют как конкретную страну, так и временной период ее экономики.

3. Можно вполне уверенно полагать, что существуют взаимосвязи между основными параметрами экономики государства и компонентами его долга, а также ежегодных заимствований. Функциональный вид этих связей представляет самостоятельный теоретический и практический интерес. К ним прежде всего относятся корреляционные связи между темпом роста выпуска и долей совокупного бюджетного дефицита

$$x_t = x(\lambda_t^s), \tag{12.62}$$

а также между темпом инфляции и объемами внутреннего и внешнего долга

$$\pi_t = \pi(Y_t, \ \ Y_t^0). \tag{12.63}$$

Подстановка соотношений типа (12.63) в сформулированные выше модели (12.28)–(12.30) и (12.34), (12.36) делает эти модели нелинейными. Представляет особый теоретический и практический интерес исследование именно таких моделей, поскольку нелинейным системам, которые описываются нелинейными дифференциальными или разностными уравнениями, присущи особые свойства. Укажем их.

Во-первых, нелинейным системам свойственны автоколебания в динамике их режима с определенными циклами. Представляет интерес при помощи соответствующих моделей выявить такие циклы и найти их периодичности.

Во-вторых, при определенных сочетаниях параметров нелинейных систем возможен скачкообразный переход типа катастрофы (или «теплового взрыва») от одного квазистационарного состояния в другое. В соответствующих нелинейных моделях это проявляется в наличии точек бифуркации (или ветвления) решений. Можно полагать, что эти резкие переходы могут соответствовать кризисным точкам экономической динамики.

12.5.5. Некоторые результаты модели

Приведенная модель динамики внешней и внутренней задолженности позволяет определять диапазоны эффективных значений ряда управляемых параметров, таких как процентные ставки, курс валюты, способы реструктуризации внешнего долга, играющих важную роль в экономических и политических сценариях. Это формирует соответствующие требования к денежно-кредитной политике государства и позволяет анализировать набор его долговых стратегий и целесообразность того или иного метода регулирования задолженности.

Стоит привести некоторые результаты моделирования динамики государственного долга России. Рассмотрим здесь две группы сценариев: нейтральную (инерционную) и оптимистическую. Во всех вариантах расчетов начальные значения внутренней и внешней задолженностей полагаются равными соответственно 5 и 25%.

А. Для первой группы предполагается, что в ближайшем десятилетии (2004–2014) экономика движется в соответствии с «инерцией», набранной в ходе предыдущего развития. Налогово-бюджетная политика остается практически неизменной: отсутствуют мероприятия государства по рационализации государственных расходов и повышению собираемости налогов, снижению и изменению структуры государственных расходов. В частности, это означает, что в стране сохранится сложившаяся неравномерная структура распределения доходов. Попытки реформирования бюджетной политики осуществляются в рамках существующей концепции путем активизации административных усилий по повышению собираемости налогов с сектора предприятий. Реальный сектор экономики по-прежнему характеризуется доминированием энергосырьевого и нескольких других экспортно-ориентированных секторов (металлургия, химическая промышленность).

В случае среднеинерционного сценария серьезных бюджетных проблем нет, однако бюджет сводится с незначительным дефицитом в 2%, полностью погашаемого за счет эмиссии ЦБ. Этот сценарий корреспондируется с прогнозом ИМЭМО, в котором говорится, что в ближайшее время Россия может столкнуться с ситуацией, когда внешние факторы роста ослабеют, а внутренние еще не окрепнут. При нулевом темпе роста курса иностранной валюты, отсутствии конвертации и списания части внешнего долга, 15%-ном коэффициенте расщепления обслуживания госдолга и ставке процента по внешнему долгу в 7%

(остальные параметры рассчитываются по регрессионным уравнениям (12.54)–(12.57)) общий государственный долг слабо возрастает. К 2014 г. внутренний долг увеличится с 5 до 9,5% при снижении внешнего долга от 25 до 21,4% (от ВВП).

В случае слабоинерционного сценария предполагается, что в отдельные годы предстоящего десятилетия бюджет сводится с незначительным профицитом (отсутствие дефицита чередуется с профицитом в 1% в ВВП). Имеет место незначительный экономический рост, однако задача по удвоению ВВП к 2000 г. выполнена не будет. Инвестиционная активность остается на низком уровне, с учетом прогрессирущего старения основного капитала потенциальный рост производства будет возможен в существенной степени за счет повышения загрузки действующих мощностей. Кратковременный период роста будет преимущественно обусловлен динамикой экспортно-ориентированного сектора экономики. Россия, оставаясь в сильной зависимости от конъюнктуры мировых цен на энергоносители, будет постоянно подвергаться повышенному риску очередной девальвации национальной валюты. Темпы увеличения объемов инвестируемых в экономику средств будут невысокими и обеспечиваться в основном за счет внутренних источников. Неразвитость правовой системы и слабость банковской системы будут существенно ограничивать инвестиционную активность. В этом сценарии общий государственный долг снизится с 30% от ВВП до 23,8% к 2014 г. с незначительным повышением внутреннего долга до 8% и снижением внешнего долга до 15,8%.

Б. Вторая группа сценариев исходит из возможности существования благоприятных внешних и внутренних условий развития российской экономики. Предполагается значительный рост конкурентоспособности, что связано со следующими факторами:

- повышением конкурентоспособности государственного управления (государственное регулирование, государственные услуги, государственная собственность);
- повышением конкурентоспособности бизнеса, т. е. ростом эффективности производства;
- повышением конкурентоспособности «человеческого капитала».

Для этой группы сценариев рассмотрим также два случая: слабооптимистический и среднеоптимистический сценарии.

Слабооптимистический сценарий соответствует экономическому росту с достижением цели удвоения ВВП. Ставка процента по внешнему долгу принимается, как и ранее, равной 7%; темп роста курса иностранной валюты принимается нулевым; профицит бюджета постепенно возрастает от 0 до 0,7%; доля полного бюджетного дефицита, погашаемого за счет эмиссии ЦБ, принимается равной 1,5%; ежегодная конверсия внешней задолженности в национальную валюту составляет 5% от величины внешнего долга. Указанное управление внешней задолженностью является следствием целенаправленной политики с целью увеличения доли внутреннего долга. В этом сценарии внутренний долг возрастет от 5 до 14,6% при снижении внешнего долга с исходного значения 25% до 6%.

Среднеоптимистический сценарий реализует вариант бюджета с постепенно растущим профицитом от 0,5 до 0,7%, что позволяет создать и увеличивать стабилизационный фонд. Предполагается отрицательный темп роста иностранной валюты в –3% (что способствует сокращению внешнего долга при пересчете в национальную валюту), постепенное снижение ставки процента по внешнему долгу от 7 до 6%, отсутствие конверсии и списания части внешнего долга. Темпы роста реальной экономики полагаются несколько выше, чем в предыдущем сценарии. Расчет показывает, что в данном сценарии в течение предстоящего десятилетия внутренний долг возрастет от исходных 5 до 5,8% ВВП при снижении внешнего долга от исходных 25 до 8,4%ВВП, т. е. суммарный государственный долг снизится почти на 34%.

Таким образом, для устойчивого снижения долгового бремени важно соблюдение жесткой бюджетной политики; бюджет на регулярной основе должен сводиться с существенным профицитом. Большое влияние имеют такие показатели, как темп роста промышленного производства, инфляция, ставки процентов по внешнему и внутреннему долгу, доля расщепления долга, курс национальной валюты. Использование некоторых методов регулирование долга (списание, конверсия) должно применяться совместно с общей работой над улучшением макроэкономических показателей.

Глава 13

Теория массового обслуживания в экономике

Теория систем массового обслуживания начала развиваться в начале XX столетия. Иохансен в 1907 г. сформулировал основные предпосылки новой теории. В 1909 г. шведский математик Эрланг применил теорию вероятностей к исследованию зависимости обслуживания телефонных вызовов от числа поступающих на телефонную станцию вызовов. В нашей стране известный математик А. Я. Хинчин систематизировал основные положения теории СМО в монографии «Теория очередей». Именно под таким названием теория массового обслуживания известна за рубежом.

В последние годы применение теории систем массового обслуживания в экономике приобрело особую актуальность в связи с использованием ряда ее аспектов в финансово-экономической сфере (банки различных типов, страховые организации, налоговые органы, аудиторские организации). Теория СМО широко применяется также в сфере обслуживания (различные системы связи, погрузочно-разгрузочные комплексы, АЗС, магазины, билетные кассы, ремонтные предприятия, больницы и т. д.) и в современных высоких технологиях (компьютерные сети, базы данных, поточные линии, военные системы ПВО и ПРО).

13.1. Марковские процессы и потоки событий

Теория массового обслуживания в качестве аппарата использует понятия теории случайных величин. Помимо этого она пользуется также расширением этих понятий, которые мы введем.

13.1.1. Случайные процессы

Определение 1. *Случайным процессом* или *случайной функцией* $S(t)$ называется функция, которая каждому моменту времени t из некоторого временного промежутка ставит в соответствие единственную случайную величину $S(t)$.

Случайная функция характеризует изменение случайной величины во времени. Введем понятие системы: системой называется целостное множество взаимосвязанных элементов, которое нельзя разделить на независимые подмножества. Элементы и связи в системе меняются во времени и характеризуют в каждый момент времени t состояние $S(t)$ системы.

Определение 2. Если система S изменяет во времени свои состояния случайным образом, то будем говорить, что в системе S протекает *случайный процесс*.

По множеству состояний системы S случайный процесс, протекающий в ней, может быть *дискретным* или *непрерывным*. В дальнейшем мы будем иметь дело с дискретными случайными процессами. В этом случае система переходит от состояния к состоянию скачком (в непрерывных процессах система меняет свои состояния постепенно и плавно).

Будем полагать, что в каждый момент времени система может находиться только в одном из своих состояний.

Определение 3. Случайный процесс, протекающий в системе S, называется *марковским*[1], если он обладает свойством *отсутствия последействия*, или *отсутствия памяти*, которое состоит в том, что для любого фиксированного момента времени t_0 вероятность состояния в будущем (при $t > t_0$) зависит только от ее состояния в настоящем при $t = t_0$ и не зависит от того, как развивался этот процесс в прошлом (при $t < t_0$).

В финансово-экономической сфере такими случайными процессами можно считать, например, процессы динамики биржевой стоимости ценных бумаг, процесс обслуживания клиентов в банках и т. п.

13.1.2. Потоки событий

Определение 4. *Потоком* называется последовательность событий, наступающих одно за другим, в общем случае, в случайные моменты

[1] Марков А. А. (1856–1922) — русский математик.

времени. Среднее число событий в потоке за единицу времени называется его *интенсивностью*, или *средней плотностью потока*.

Определение 5. События в потоке называются *однородными*, если они различаются только по моментам времени их наступления, и *неоднородными* в противном случае.

В дальнейшем будем рассматривать только потоки однородных событий, не оговаривая это специально.

Определение 6. Поток событий называется *потоком без последействия*, или *потоком без памяти*, если для любой пары непересекающихся промежутков времени число событий за один из этих промежутков не зависит от числа событий за другой промежуток.

Очевидно, что *регулярный* поток событий, в котором события наступают через строго определенные промежутки времени, не обладает свойством отсутствия последействия, поскольку его регулярность порождает последействие.

Определение 7. Поток событий называется *ординарным*, если вероятность наступления за достаточно малый (элементарный) промежуток времени более одного события пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью наступления одного события за этот промежуток.

Определение 8. Поток событий называется *стационарным*, если вероятность появления какого-либо числа событий за некоторый промежуток времени зависит только от длины этого промежутка и не зависит от момента его начала.

Очевидно, что для стационарного потока его вероятностные характеристики не зависят от времени, что и отражено в его названии.

Определение 9. Поток событий, обладающий свойствами отсутствия последействия и ординарности, называется *пуассоновским*. Стационарный пуассоновский поток называется *простейшим*.

Интенсивность простейшего потока не зависит от времени в силу его стационарности.

Теорема. *Для простейшего потока событий с интенсивностью* λ *случайное число событий* $x(\tau) = m$ $(m = 1, 2, ...,)$, *наступающих за промежуток времени* τ, *распределено по закону Пуассона*

$$p_m(\tau) = \frac{(\lambda\tau)^m}{m!} e^{-\lambda\tau}. \qquad (13.1)$$

Эта теорема является основополагающей для теории массового обслуживания; ее доказательство мы опускаем. Напомним здесь, что закон распределения Пуассона справедлив для вероятности наступления массовых и редких событий.

13.1.3. Дискретный марковский случайный процесс с непрерывным временем

Будем рассматривать случайные процессы с *непрерывным временем*. Пусть система S имеет n возможных состояний. Тогда *вероятностью* $p_i(t)$ i-го *состояния системы* в момент времени t будем называть вероятность $p(S_1(t))$, $i = 1, 2, ..., n$ события $S_1(t)$, состоящего в том, что система S в момент времени t находится в состоянии s_1. При этом выполнено нормировочное условие

$$\sum_{i=1}^{n} p_i(t) = 1, \quad t \geq 0. \tag{13.2}$$

В процессе с непрерывным временем рассматривают *плотности вероятности перехода* λ_{ij} системы S из состояния s_i в состояние s_j как предел отношения

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{p_{ij}(t, \Delta t)}{\Delta t}. \tag{13.3}$$

Здесь $p_{ij}(t, \Delta t)$ — вероятность того, что система S, находившаяся в момент времени t в состоянии s_i, за малый промежуток времени Δt перейдет в состояние s_j.

Отсюда выводятся *уравнения Колмогорова* — система, содержащая n дифференциальных уравнений для определения вероятностей $p_i(t)$. Они являются основой теории систем массового обслуживания и будут рассмотрены далее.

13.2. Системы массового обслуживания

Системы массового обслуживания (СМО) представляют собой системы специфического вида. Основой СМО является определенное число обслуживающих устройств — *каналы обслуживания*. Роль каналов в реальности могут выполнять приборы, операторы, продавцы, линии связи и пр.

13.2.1. Структура и классификация СМО

Предназначение СМО состоит в обслуживании *потока заявок* (*требований*), представляющих последовательность событий, поступающих нерегулярно и в заранее неизвестные и случайные моменты времени. Само *обслуживание заявок* также имеет непостоянный характер, происходит в случайные промежутки времени и зависит от многих и даже неизвестных причин. Случайный характер потока заявок и времени их обслуживания обусловливает неравномерность загрузки СМО: на входе могут накапливаться необслуженные заявки (перегрузка СМО) либо заявок нет или их меньше, чем свободных каналов (недогрузка СМО). Структура систем массового обслуживания показана схематически на рис. 13.1. В СМО поступает поток заявок; часть из них принимается на обслуживание в каналы, часть ждет в очереди на обслуживание, часть покидает систему необслуженными.

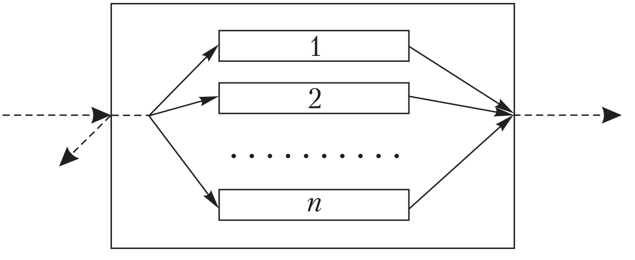


Рис. 13.1

Основными элементами СМО являются:

1) входной поток заявок;
2) очередь;
3) каналы обслуживания;
4) выходной поток заявок (обслуженные заявки).

Эффективность функционирования СМО определяется ее *пропускной способностью* — относительным числом обслуженных заявок.

По числу каналов n все СМО разделяются на одноканальные ($n = 1$) и многоканальные ($n > 1$). Многоканальные СМО могут быть как однородными (по каналам), так и разнородными (по продолжительности обслуживания заявок).

По дисциплине обслуживания различаются три класса СМО.

1. СМО *с отказами* (нулевое ожидание или явные потери). «Отказная» заявка вновь поступает в систему, чтобы ее обслужили (например, вызов абонента через АТС).
2. СМО *с ожиданием* (неограниченное ожидание или очередь). При занятости всех каналов заявка поступает в очередь и в конце концов будет выполнена (торговля, сферы бытового и медицинского обслуживания).
3. СМО *смешанного типа* (ограниченное ожидание). Имеется ограничение на длину очереди (сервис по обслуживанию автомобилей). Другой вид ограниченного ожидания — ограничение на время пребывания заявки в СМО (ПВО, особые условия обслуживания в банке).

В дальнейшем мы будем рассматривать *открытые* (поток заявок неограничен), *упорядоченные* (заявки обслуживаются в порядке их поступления) и *однофазные* СМО (однородные каналы выполняют одну и ту же операцию).

Целью теории систем массового обслуживания является выработка рекомендаций по рациональному построению СМО и рациональной организации их работы и регулированию потока заявок. Отсюда вытекают задачи, связанные с теорией массового обслуживания: установление зависимостей работы СМО от ее организации, характера потока заявок, числа каналов и их производительности, правил работы СМО.

13.2.2. Основные показатели эффективности работы СМО

Эффективность работы систем массового обслуживания характеризуют показатели, которые можно разбить на три группы.

1. Группа показателей эффективности использования СМО:
   - абсолютная пропускная способность — среднее число заявок, обслуживаемых в единицу времени (A);
   - относительная пропускная способность — отношение абсолютной пропускной способности к среднему числу заявок, поступивших в систему за единицу времени (Q);
   - средняя продолжительность периода занятости СМО;
   - коэффициент использования СМО — средняя доля времени, в течение которого система занята обслуживанием заявок.

2. Показатели качества обслуживания заявок:
   - среднее время ожидания заявки в очереди ($\bar{T}_{line}$);
   - среднее время пребывания заявки в СМО ($\bar{T}_{sys}$);
   - вероятность отказа заявки в обслуживании без ожидания;
   - вероятность немедленного приема заявки;
   - закон распределения времени ожидания заявки в очереди в СМО;
   - среднее число заявок в очереди ($\bar{N}_{line}$);
   - среднее число заявок, находящихся в СМО ($\bar{N}_{sys}$).
3. Показатели эффективности функционирования пары «СМО — потребитель» (вся совокупность заявок или их источник, например, средний доход в единицу времени от СМО). Эта группа полезна, когда доход от СМО и затраты на ее обслуживание измеряются в одних и тех же единицах и отражают специфику работы СМО.

13.2.3. Случайный процесс в СМО

Процессы поступления и обслуживания заявок в СМО являются случайными, что обусловлено случайным характером потока заявок и длительности их обслуживания. Применение аппарата случайных процессов упрощает исследование СМО. По характеру потоков событий СМО разделяются на марковские и немарковские; в дальнейшем мы будем иметь дело с системами первого типа, т. е. в основе СМО предполагается марковский случайный процесс, когда вероятность состояния СМО в будущем зависит только от ее состояния в настоящем и не зависит от прошлого. Условие марковского случайного процесса необходимо, чтобы все потоки событий, при которых система переходит из одного состояния в другое (потоки заявок, потоки обслуживания, и т. д.), были пуассоновскими. Преимущества и полезность такого подхода состоит в том, что для выработки обоснованных рекомендаций нужно знать не точные характеристики СМО, а лишь их приближенные значения.

Рассмотрим ряд примеров: что принять за СМО, каналы обслуживания и их число, поток заявок на входе, поток обслуживания на выходе.

Пример 1. Вызов абонента, имеющего только один телефонный номер, через АТС. Здесь поток заявок является случайным, если абонент занят, очередная поступающая заявка получает отказ в обслуживании; АТС — это одноканальная СМО (канал обслуживания — линия связи с телефонным номером абонента) с отказами.

Пример 2. Инструментальная кладовая с тремя кладовщиками, выдающими рабочим по их требованию одинаковые наборы инструментов во время работы; если все кладовщики заняты, очередному рабочему инструмент не выдается. Здесь кладовую следует принять за СМО (поток заявок и поток обслуженных заявок являются случайными и зависят только от настоящего состояния), число каналов обслуживания — три; СМО с отказами.

Пример 3. Работа телефонной справочной Центрального железнодорожного агентства. Многоканальная СМО, число каналов — количество дежурных операторов, СМО с ограниченной очередью (ограничение на длину очереди — память накопителя вызовов).

Пример 4. Железнодорожная станция принимает на 5 путей пассажирские поезда и электрички, которые прибывают по расписанию каждые 15 минут на каждый из них и отбывают после обслуживания также по расписанию через 12 минут. В данном случае теория систем массового обслуживания неприменима, поскольку входной и выходной потоки (приход и уход обслуженных поездов организован по расписанию) не являются случайными.

13.3. Одноканальная СМО с отказами

13.3.1. Основные понятия

Пусть СМО включает в себя только один канал обслуживания, и на ее вход подается пуассоновский поток заявок с интенсивностью λ, т. е. непрерывная случайная величина T — время между двумя соседними заявками — распределена по закону Пуассона (13.1); другая случайная величина T_s — время обслуживания каналом одной заявки — также распределена по закону Пуассона с параметром μ:

$$f_1(t) = \mu e^{-\mu t}. \tag{13.4}$$

Параметры λ и μ называются соответственно *интенсивностью потока заявок* и *интенсивностью потока обслуживания*. Например, среднее значение $\overline{T}_0$ равно математическому ожиданию $M(T_0)$, откуда и следует формула и название при больших величинах T

$$M(T_0) = \int_0^T tf(t)dt = \int_0^T t\mu e^{-\mu t}dt \approx 1/\mu. \tag{13.5}$$

Состояния СМО характеризуются простаиванием или занятостью ее канала, т. е. система может находиться в одном из двух состояний: s_0 — канал свободен (простаивает) или s_1 — канал занят. Переход из состояния s_0 в состояние s_1 системы переводит поток входящих заявок, а переход из состояния s_0 в состояние s_1 — поток обслуживаний. Плотности вероятностей перехода из состояния s_0 в состояние s_1 и обратно равны, соответственно, λ и μ. Граф состояний СМО показан на рис. 13.2.

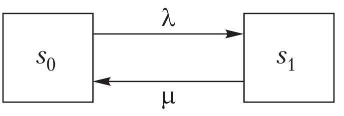


Рис. 13.2

13.3.2. Основные соотношения

Пусть $p_0(t)$ и $p_1(t)$ — вероятности событий, состоящих в том, что в момент времени t СМО находится в состояниях s_0 и s_1 соответственно (вероятности состояний). Очевидно, что справедливо нормировочное условие:

$$p_0(t) + p_1(t) = 1. \tag{13.6}$$

В силу того, что случайный процесс, протекающий в СМО, является марковским, то вероятности $p_0(t)$ и $p_1(t)$ удовлетворяют системе уравнений Колмогорова:

$$\begin{cases} \dfrac{dp_0(t)}{dt} = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t), \\ \dfrac{dp_1(t)}{dt} = -\mu p_1(t) + \lambda p_0(t). \end{cases} \tag{13.7}$$

Подстановка нормировочного условия (13.6) в эту систему приводит к одному обыкновенному дифференциальному уравнению относительно $p_0(t)$

$$\frac{p_0(t)}{dt} + (\lambda + \mu) p_0(t) = \mu, \quad t \ge 0. \tag{13.8}$$

При начальном условии, что в начальный момент времени $t = 0$ канал свободен:

$$p_0(0) = 1; \quad p_1(t) = 0, \tag{13.9}$$

получаем решение уравнения (13.8):

$$p_0(t) = [\mu + \lambda \exp(-(\lambda + \mu) t)]/(\lambda + \mu). \qquad (13.10)$$

Затем из нормировочного условия (13.6) получаем формулу для $p_1(t)$:

$$p_1(t) = \lambda [1 - \exp(-(\lambda + \mu)) t)]/(\lambda + \mu). \qquad (13.11)$$

13.3.3. Предельный режим работы

Из формул (13.10) и (13.11) видно, что с ростом времени t вторые слагаемые в квадратных скобках стремятся к нулю, т. е. $p_0(t)$ и $p_1(t)$ заметно отличны от постоянных величин лишь в начальный интервал времени после начала работы СМО. Поскольку нас интересуют осредненные характеристики работы СМО (установившийся или *предельный режим работы СМО*), то естественно в дальнейшем рассматривать предельные значения вероятностей состояния СМО, т. е. при $t \to \infty$. Тогда из (13.10) и (13.11) получаем предельным переходом:

$$\lim_{t\to\infty} p_0(t) = p_0 = \mu/(\lambda + \mu), \quad \lim_{t\to\infty} p_1(t) = p_1 = \lambda/(\lambda + \mu). \qquad (13.12)$$

Заметим, что при $\mu < \lambda$ вероятность отказа выше 0,5 и превышает вероятность обслуживания.

13.3.4. Основные характеристики работы СМО

Теперь обратимся к установлению основных характеристик СМО (см. п. 13.2.1). Поскольку вероятность обслуживания поступивших заявок равна p_0, а относительная пропускная способность Q равна среднему числу обслуженных заявок к среднему числу поступивших заявок за единицу времени, то $Q = p_0$, т. е. для одноканальной СМО с отказами:

$$Q = \mu/(\lambda + \mu). \qquad (13.13)$$

Абсолютная пропускная способность СМО — это среднее число заявок, обслуживаемое СМО в единицу времени, или интенсивность выходящего потока обслуженных заявок — это часть интенсивности входящего пока заявок:

$$A = \lambda\mu/(\lambda + \mu). \qquad (13.14)$$

Из второй группы показателей (качества работы СМО) укажем вероятность отказа в обслуживании заявки, когда канал занят; это вероятность p_1:

$$p_r = p_1 = \lambda/(\lambda + \mu). \qquad (13.15)$$

Среднее время обслуживания заявки, как говорилось выше, есть величина, обратная μ:

$$\overline{T}_s = 1/\mu. \quad (13.16)$$

Аналогично, среднее время простоя канала равно:

$$\overline{T}_{st} = 1/\lambda. \quad (13.17)$$

Наконец, среднее время пребывания заявки в системе рассчитывается по формуле:

$$\overline{T}_{sys} = p_0\overline{T}_s = 1/(\lambda + \mu) = \overline{T}_s\overline{T}_{st}/(\overline{T}_s + \overline{T}_{st}). \quad (13.18)$$

Пример 5. Телефонная АТС имеет одну линию, на которую в среднем приходит 0,8 вызова в минуту. Среднее время разговора 2 минуты. Вызов, пришедший во время разговора, не обслуживается. Считая потоки вызовов пуассоновскими, найти абсолютную и относительную пропускную способности станции и вероятность отказа абоненту.

Решение. Телефонную станцию рассматриваем как одноканальную СМО с отказами. $\overline{T}_s = 1/\mu = 2$ мин; интенсивности поступающего и обслуженного потоков заявок равны соответственно $\lambda = 0{,}8$, $\mu = 0{,}5$. Тогда по формулам (13.13) и (13.14) имеем: $Q = 0{,}385$, $p_r = 0{,}615$, $A = \lambda Q = 0{,}308$ выз./мин. Заметим здесь, что абсолютная пропускная способность СМО оказалась значительно меньше интенсивности μ потока обслуживания; это обстоятельство обусловлено случайным характером потока заявок.

Пример 6. На телефонную линию приходит простейший поток вызовов с интенсивностью $\lambda = 0{,}9$ выз./мин; производительность линии 1,5 выз./мин. Вызов, пришедший на линию во время ее занятости, не обслуживается. Найти абсолютную пропускную способность линии, среднее время обслуживания одного вызова, вероятность отказа в обслуживании, а также среднее время пребывания заявки в системе.

Решение. Используя формулы (13.14), (13.15), (13.16) и (13.18), последовательно получаем: $A = 0{,}563$ выз./мин ; $\overline{T}_s = 0{,}67$ мин; $p_r = 0{,}375$; $T_{sys} = 0{,}42$ мин.

13.4. Многоканальная СМО с отказами

13.4.1. Основные понятия

Рассмотрим работу многоканальной СМО ($n > 1$) с отказами. На ее вход поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ, а поток обслуживаний каждым каналом является также простейшим с интенсивностью $\mu = 1/\overline{T}_s$. Занумеруем состояния системы по числу занятых каналов (по числу заявок, находящихся в системе, — каждый канал в любой момент времени либо свободен, либо обслуживает только одну заявку). Таким образом, СМО может находиться только в одном из $n + 1$ состояний: от состояния s_0 (все каналы свободны) до состояния s_n — все каналы заняты. Заявка, поступившая в систему, когда заняты все n каналов, получает отказ в обслуживании и покидает СМО.

Граф состояний многоканальной СМО с отказами представлен на рис. 13.3.

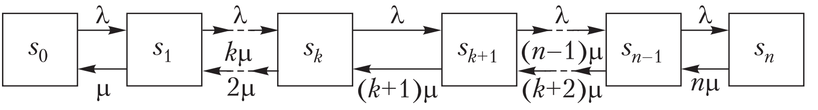


Рис. 13.3

Входной поток заявок с интенсивностью (плотностью вероятности перехода) λ переводит систему из любого состояния s_k ($k = 1, ..., n - 1$) в соседнее состояние справа s_{k+1}, причем плотность вероятности этого перехода одинакова и равна λ. В силу ординарности входного потока заявок СМО может переходить слева направо только в соседние состояния без перескока через какое-либо состояние.

Переход СМО в направлении справа налево из состояния s_k, когда k каналов заняты ($k = 1, ..., n$), в состояние s_{k-1}, когда освобождается один из занятых каналов, происходит под воздействием суммарного потока обслуживаний с интенсивностью $k\mu$. Следовательно, плотность вероятности такого перехода равна $k\mu$. В этом случае система также не может перескакивать через состояние, а только последовательно переходит из одного состояния в другое.

13.4.2. Уравнения Колмогорова для многоканальной СМО

Воспользуемся правилом составления дифференциальных уравнений Колмогорова, по которому изменение вероятности какого-либо состояния равно сумме входящих и выходящих из этого состояния (квадратика на графе) потоков, умноженных на их интенсивности. При этом выходящий поток считается со знаком минус, а входящий — со знаком плюс (аналог правила Кирхгофа из электрофизики). Тогда для вероятностей состояний $p_0(t)$, $p_1(t)$, ..., $p_n(t)$ получаем систему из $n + 1$ дифференциальных уравнений первого порядка, содержащую $n + 1$ неизвестных функций:

$$\begin{cases} p_0'(t) = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ p_k'(t) = \lambda p_{k-1}(t) - (\lambda + k\mu) p_k(t) + (k+1)\mu p_{k+1}(t), \ k = 1, \ \dots, \ n-1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ p_n'(t) = \lambda p_{n-1}(t) - n\mu p_n(t). \end{cases} \quad (13.19)$$

Вероятности состояний в любой момент времени t удовлетворяют нормировочному условию:

$$p_0(t) + p_1(t) + \dots + p_n(t) = 1, \quad (13.20)$$

т. е. в любой момент времени t система находится в одном из $n + 1$ состояний, указанных на графе рис. 13.3.

13.4.3. Предельный режим работы

Поскольку нас интересует предельный режим работы СМО в установившемся состоянии, мы будем рассматривать предельные вероятности состояний системы, т. е. ситуацию, когда:

$$p_k = \lim_{t \to \infty} p_k(t), \quad p_k' = 0, \quad k = 0, \ 1, \ \dots, \ n. \quad (13.21)$$

Подстановка этих соотношений в уравнения (13.19) приводит к системе $n + 1$ линейных алгебраических уравнений относительно $n + 1$ неизвестных — предельных вероятностей p_0, p_1, ..., p_n.

$$\begin{cases} -\lambda p_0 + \mu p_1 = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \lambda p_{k-1} - (\lambda + k\mu) p_k + (k+1)\mu p_{k+1} = 0, \ k = 2, \ \dots, \ n-1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \lambda p_{n-1} - n\mu p_n = 0. \end{cases} \quad (13.22)$$

Поскольку эта система является вырожденной (существует ненулевое решение однородной системы уравнений), то к этим уравнениям следует добавить и уравнение нормировки в стационарной форме:

$$p_0 + p_1 + \dots + p_n = 1. \quad (13.23)$$

Матрица системы уравнений (13.22) имеет специфический вид — она является трехдиагональной. Решение системы уравнений (13.22), (13.23) выражаются по следующим формулам:

$$p_0 = 1\bigg/\left(\sum_{i=0}^{n} \rho^i / i!\right), \tag{13.24}$$

$$p_k = p_0 \rho^k / k!, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{13.25}$$

В формулах (13.25)

$$\rho = \lambda/\mu \tag{13.26}$$

— *приведенная интенсивность* входящего потока (или показатель нагрузки СМО, или трафик), измеряемая в эрлангах. Формулы (13.25) называются *формулами Эрланга*. Они выражают предельные вероятности состояний СМО через число каналов n и показатель нагрузки ρ. Следует иметь в виду, что $0! = 1$ (первая формула (13.25)).

13.4.4. Основные характеристики СМО

Теперь обратимся к основным характеристикам многоканальной СМО с отказами.

Отказ в обслуживании заявки, по определению СМО с отказами, наступает, когда все каналы заняты и система находится в состоянии s_n; следовательно, вероятность отказа равна вероятности p_n:

$$p_r = p_n = p_0 \rho^n / n!. \tag{13.27}$$

Поскольку событие обслуживания заявки и событие отказа в ее обслуживании являются противоположными, то вероятность обслуживания заявки (вероятность того, что свободен хотя бы один канал) равна:

$$p_s = 1 - p_r = 1 - p_n. \tag{13.28}$$

Относительная пропускная способность СМО определяется вероятностью ее обслуживания:

$$Q = p_s = 1 - p_r = 1 - p_n. \tag{13.29}$$

Абсолютная пропускная способность СМО (она же интенсивность потока обслуженных заявок):

$$A = \lambda Q = \lambda(1 - p_n). \tag{13.30}$$

Для многоканальной СМО одной из важных характеристик ее эффективности является *среднее число занятых каналов* $\overline{K}$ — отношение абсолютной пропускной способности к интенсивности канала обслуживания; в случае СМО с отказами эта величина совпадает со средним числом заявок, находящихся в системе $\overline{N}_{sys}$:

$$\overline{K} = \overline{N}_{sys} = A/\mu = \rho(1 - p_n) = \lambda(1 - p_n)/\mu. \tag{13.31}$$

Наконец, приведем формулу для среднего времени пребывания заявки в СМО; эта характеристика относится ко всем заявкам — как к обслуженным, так и получившим отказ:

$$\overline{T}_{sys} = \overline{N}_{sys}/\lambda. \tag{13.32}$$

Рассмотрим задачи на применение многоканальных СМО с отказами.

Пример 7. В отделении банка на обслуживании клиентов работают 3 оператора. Среднее время обслуживания одного клиента оператором — 12 минут. В среднем за час в банк обращаются 15 клиентов. Если все операторы заняты, клиенты не обслуживаются банком. Найти основные средние характеристики работы отделения банка, а также вероятность того, что не менее двух операторов простаивают.

Решение. При условии того, что потоки заявок являются простейшими, банк можно принять как СМО с отказами, число каналов $n = 3$. Приняв за единицу времени час, получаем, что интенсивность входного потока заявок $\lambda = 15$ кл./ч, интенсивность одного канала обслуживания $\mu = 5$ кл./ч. Тогда $\rho = \lambda/\mu = 3$; Используя формулы (13.25), (13.27)–(13.32), последовательно получаем:

$$p_0 = 1/(1 + 3 + 3^2/2 + 3^3/6) = 0{,}077;\ p_r = p_3 = p_0\, 3^3/6 = 0{,}346;$$

$$Q = p_s = 1 - p_r = 1 - p_n = 0{,}654.$$

Из этих расчетов следует, что из каждых 100 клиентов, обратившихся в банк, в среднем будут обслужены около 65 клиентов. При этом абсолютная пропускная способность СМО составит $A = \lambda Q = 9{,}81$ кл./ч (это меньше суммарной интенсивности потока обслуженных заявок $n\mu = 15$ кл./ч из-за случайности потоков заявок); среднее число занятых каналов или заявок в системе $\overline{K} = \overline{N}_{sys} = A/\mu = 1{,}962$; среднее время пребывания заявки в СМО $\overline{T}_{sys} = \overline{N}_{sys}/\lambda = 0{,}131$ ч $= 7{,}85$ мин.

Наконец, вероятность того, что не менее двух каналов простаивают, равна сумме вероятностей $p_0 + p_1 = 0{,}077(1 + 3) = 0{,}308$.

Пример 8. В условиях предыдущей задачи рассчитать, как изменятся основные характеристики работы СМО, если квалификация операторов такова, что позволяет каждому из них тратить на обслуживание одного клиента в среднем 10 минут.

Решение. В этом случае $\mu = 6$ кл./ч, т. е. производительность каждого оператора повышается на 20%. Тогда при прежней интенсивности входного потока заявок получаем, что $\rho = 2{,}5$. Теперь имеем:

$$p_0 = 1/(1 + 2{,}5 + 2{,}5^2/2 + 2{,}5^3/6) = 0{,}108;\ p_r = p_3 = p_0\ 2{,}5^3/6 = 0{,}28;$$

$$Q = p_s = 1 - p_r = 0{,}72;\ A = \lambda Q = 10{,}8 \text{ кл./ч};\ \overline{K} = \overline{N}_{sys} = A/\mu = 1{,}8;$$

$$\overline{T}_{sys} = \overline{N}_{sys}/\lambda = 0{,}12 \text{ ч} = 7{,}2 \text{ мин}.$$

Из этих расчетов можно сделать следующие выводы: в результате повышения производительности труда каждого из операторов на 20% вероятность обслуживания возросла на 10% (из каждых 100 клиентов, обратившихся в банк, в среднем будут обслужены 72), пропускная способность СМО возросла также на 10%, среднее число занятых каналов (среднее число заявок в системе) и среднее время пребывания заявки в системе уменьшились на 8%.

Пример 9. В условиях примера 7 определить минимальную целую среднюю производительность операторов (интенсивность потока обслуживания одним каналом μ), чтобы вероятность обслуживания клиентов банка была бы не ниже 0,9.

Решение. Из условия задачи $1 - p_n \geq 0{,}9$ следует, что $p_n \leq 0{,}1$. Путем подбора определяем: при $\mu = 14$ $p_s < 0{,}9$; при $\mu = 14$ $p_3 = 0{,}072$, т. е. $p_s = 0{,}9375$, что и приводит к ответу: $\mu \geq 14$ кл./ч.

13.5. Многоканальная СМО с ожиданием и ограничением на длину очереди

13.5.1. Основные понятия и схема

Рассмотрим многоканальную СМО ($n \geq 1$) с ожиданием, т. е. заявка, поступившая в СМО в момент времени, когда все каналы заняты, в отличие от СМО с отказами, не покидает систему необслуженной, а становится в очередь и ожидает обслуживания. Следует отметить, что большинство обслуживающих фирм и учреждений устроены как раз по такому принципу. Пусть максимальное число мест в очереди равно $m \geq 1$, т. е. в очереди могут ожидать своего обслуживания не более m заявок.

Поэтому заявка, пришедшая на вход в СМО в момент, когда в очереди уже находятся m заявок, получает отказ и покидает систему. Иными словами, «заполнение» СМО заявками из входного потока идет в два этапа: сначала происходит загрузка каналов обслуживания, затем заполняется очередь. Нумерация состояний системы в этом случае имеет следующий вид: от состояния s_0 (в СМО нет заявок и все каналы свободны) до состояния s_n (в СМО n заявок и все каналы заняты) очереди нет; от состояния s_{n+1} (в СМО $n + 1$ заявка, все каналы заняты и одна заявка находится в очереди) до состояния s_{n+m} (все каналы заняты и все m мест в очереди заняты заявками) происходит заполнение очереди.

Граф состояний СМО показан на рис. 13.4. Переход системы из состояния s_k в состояние s_{k+1} слева направо ($k = 0, 1, ..., n + m - 1$) происходит под воздействием одного и того же входного потока заявок интенсивности λ; следовательно, плотности вероятности перехода из состояния в состояние слева направо одинаковы и равны λ.

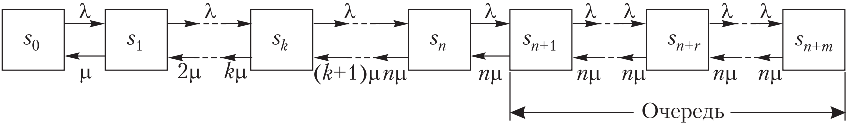


Рис. 13.4

Переход системы из состояния в состояние справа налево происходит с разными плотностями вероятностей внутри двух циклов состояний, отмеченных выше. Если заявка продолжает оставаться в очереди (состояние s_k, $n + 1 \leq k \leq n + m$), т. е. все каналы заняты, то эти переходы имеют плотность вероятности, равную $n\mu$ (перемещение системы из состояния в состояние обусловлено общей работой n каналов). Если система находится в состоянии, когда занято k каналов ($1 \leq k \leq n$), то переход ее в левое состояние обусловлен потоком, представляющим собой сумму k потоков обслуживаний (общей работой k каналов); в таком случае плотность вероятности перехода равна $k\mu$.

Следует отметить, что, как и в предыдущих случаях, система не может «перескакивать» через промежуточное состояние, а переходит из состояния в состояние последовательно: либо слева направо, либо справа налево по графу состояний.

13.5.2. Основные соотношения

Предельные вероятности $p_0, p_1, ..., p_n, p_{n+1}, ..., p_{n+m}$ соответствующих состояний СМО удовлетворяют системе линейных однородных алгебраических уравнений, которая получается из системы дифференциальных уравнений Колмогорова путем, аналогичным описанному выше. Эта система имеет вид:

$$\begin{cases} -\lambda p_0 + \mu p_1 - 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \lambda p_{k-1} - (\lambda + k\mu) p_k + (k+1) p_{k+1} = 0, \; k = 2, \; \dots, \; n-1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \lambda p_{n-1} - (\lambda + n\mu) p_n + n\mu p_{n+1} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \lambda p_{n+k-1} - (\lambda + n\mu) p_{n+k} + n\mu p_{n+k+1} = 0, \; k = 1, \; \dots, \; m-1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \lambda p_{n+m-1} - n\mu p_{n+m} = 0. \end{cases} \tag{13.33}$$

К этой системе уравнений необходимо добавить нормировочное условие

$$\sum_{k=0}^{n+m} p_k = 1. \tag{13.34}$$

Введем величину $\psi = \rho/n = \lambda/(n\mu)$ — *показатель нагрузки на один канал*. Решение системы уравнений (13.33), (13.34) выражается, как и в предыдущем случае СМО с отказами, через вероятность простоя системы (или вероятность того, что все каналы свободны) p_0:

$$p_0 = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} \psi^k + \frac{n^n}{n!} \sum_{k=n+1}^{n+m} \psi^k \right)^{-1}.$$

Второе слагаемое в правой части этого равенства является суммой m членов геометрической прогрессии с первым членом ψ^{n+1} и знаменателем ψ, т. е. формула для p_0 упрощается:

$$p_0 = \begin{cases} \left(\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{n^k}{k!} \psi^k + \dfrac{n^n}{n!} \dfrac{\psi^{n+1}(1-\psi^m)}{1-\psi} \right)^{-1}, & \psi \neq 1; \\ \left(\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{n^k}{k!} + \dfrac{n^n}{n!} m \right)^{-1}, & \psi = 1. \end{cases} \tag{13.35}$$

Остальные предельные вероятности состояний имеют вид, аналогичный формулам (13.25):

$$p_k = \begin{cases} (n^k/k!)\psi^k p_0, & k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n; \\ (n^n/n!)\psi^k p_0, & k = n+1,\ \ldots,\ n+m. \end{cases} \tag{13.36}$$

13.5.3. Характеристики СМО

Вероятность отказа (заявка, поступившая в момент, когда заняты все n каналов и все m мест в очереди) есть вероятность того, что СМО находится в состоянии s_{n+m}, откуда получаем:

$$p_r = p_{n+m} = (n^n/n!)\psi^{n+m} p_0. \tag{13.37}$$

Так как события отказа заявки и приема ее в СМО являются противоположными, то вероятность приема заявки в СМО равна вероятности p_{sys} и относительной пропускной способности системы:

$$p_{sys} = Q = 1 - p_r = 1 - (n^n/n!)\psi^{k+m} p_0. \tag{13.38}$$

Отсюда получаем формулу для абсолютной пропускной способности:

$$A = \lambda Q = \lambda[1 - (n^n/n!)\psi^{n+m} p_0]. \tag{13.39}$$

Так как каждый занятый канал обслуживает в среднем μ заявок в единицу времени, то среднее число заявок, находящихся под обслуживанием (или среднее число занятых каналов) подсчитывается по формуле:

$$\overline{N}_s = \overline{K} = A/\mu = \rho Q = \rho[1 - (n^n/n!)\psi^{n+m} p_0]. \tag{13.40}$$

Для вычисления среднего числа заявок $\overline{N}_{line}$, находящихся в очереди, рассмотрим дискретную случайную величину N_{line} — число заявок в очереди. Закон распределения N_{line} имеет вид:

N_{line}	0	1	2	...	m
P	p_s	p_{n+1}	p_{n+2}	...	p_{n+m}

Здесь $p_s = \sum_{k=0}^{n} p_k$, поскольку событие, состоящее в том, что в очереди нет ни одной заявки, является объединением событий, состоящих в том, что СМО находится в одном из состояний s_0, s_1, ..., s_n. Так как $\overline{N}_{line}$ является математическим ожиданием M случайной величины N_{line}, то отсюда получаем и преобразуем:

$$\overline{N}_{line} = M[N_{line}] = \sum_{k=1}^{m} kp_{k+n} = (n^n/n!)p_0 \sum_{k=1}^{m} k\psi^{k+n} =$$

$$= (n^n/n!)\, p_0 \psi^{n+1} \sum_{k=1}^{m} k\psi^{k-1}.$$

Сумма в последнем равенстве имеет выражение в виде компактной формулы как при $\psi \neq 1$ (формула суммирования), так и при $\psi = 1$ (сумма отрезка натурального ряда чисел). Соответственно мы получаем окончательное выражение для среднего числа заявок в очереди:

$$\overline{N}_{line} = \begin{cases} \dfrac{n^n}{n!} \psi^{n+1} \dfrac{1-\psi^m (m+1-m\psi)}{(1-\psi)^2} p_0, & \psi \neq 1; \\ \dfrac{n^n}{n!} \dfrac{m(m+1)}{2} p_0, & \psi = 1. \end{cases} \tag{13.41}$$

Среднее число заявок, находящихся в системе, равно сумме средних чисел обслуживаемых заявок и заявок, находящихся в очереди:

$$\overline{N}_{sys} = \overline{N}_{line} + \overline{N}_s. \tag{13.42}$$

Для средних величин времени обслуживания заявки, времени ожидания заявки в очереди и времени пребывания заявки в системе имеем, соответственно, следующие формулы (формулы Литтла):

$$\overline{T}_s = \overline{N}_s / \lambda, \tag{13.43}$$

$$\overline{T}_{line} = \overline{N}_{line} / \lambda, \tag{13.44}$$

$$\overline{T}_{sys} = \overline{T}_s + \overline{T}_{line} = (\overline{N}_s + \overline{N}_{line}) / \lambda = \overline{N}_{sys} / \lambda. \tag{13.45}$$

Формулы (13.35)–(13.45) позволяют рассчитать все характеристики работы многоканальной СМО с ожиданием и ограничением на длину очереди. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 10. В пункте валютного обмена работают два оператора, каждый из которых обслуживает клиента в среднем за 2,5 минуты. По условиям безопасности в помещении пункта может находиться одновременно не более 5 человек, включая обслуживаемых клиентов. Если помещение заполнено, то очередной клиент не становится в очередь, а уходит. В среднем клиенты приходят каждые 2 минуты. Найти основные характеристики работы обменного пункта.

Решение. Математической моделью данного обменного пункта является двухканальная СМО ($n = 2$) с ожиданием и ограничением на длину очереди ($m = 3$). Предполагается, что потоки прибывающих клиентов и обслуживания — простейшие. Интенсивность входящего потока $\lambda = 0{,}5$ кл./мин, интенсивность потока обслуживания $\mu = 0{,}4$ кл./мин; отсюда показатель нагрузки СМО $\rho = \lambda/\mu = 1{,}25$ эрланга, а показатель нагрузки на один канал $\psi = \rho/n = 0{,}625$ эрланга. Вероятность простоя системы (оба канала свободны) определяется по формуле (13.35) при $n = 2$, $m = 3$ и $\psi \neq 1$:

$$p_0 = [1 + (2/1!)\,0{,}625 +$$

$$+ (2^2/2!)\,0{,}625^2 + (2^2/2!)\,(0{,}625^3(1 - 0{,}625^3\,)/(1 - 0{,}625)]^{-1} = 0{,}249.$$

Вероятность отказа, в соответствии с формулой (13.37), равна

$$p_r = p_5 = (2^2/2!)\,0{,}625^5 \cdot 0{,}249 = 0{,}047,$$

т. е. из каждых 100 клиентов, обратившихся в обменный пункт, в среднем обслуживаются 95 клиентов.

Относительная пропускная способность (формула (13.38)):

$$Q = 1 - 0{,}047 = 0{,}953.$$

Абсолютная пропускная способность, согласно формуле (13.39):

$$A = \lambda Q = 0{,}5 \cdot 0{,}953 = 0{,}477.$$

Далее находим по формулам (13.40)–(13.45) остальные характеристики работы СМО:

- среднее число клиентов, находящихся под обслуживанием (среднее число занятых операторов)

$$\overline{N}_s = \overline{K} = A/\mu = \rho/Q = 1{,}25 \cdot 0{,}953 = 1{,}191;$$

- среднее число клиентов, ожидающих в очереди

$$\overline{N}_{line} = (2^2/2!) \cdot 0{,}625^3 \cdot [1 - (4 - 3 \cdot 0{,}625) \cdot 0{,}625^3]/(1 - 0{,}625)^2 \cdot 0{,}249 = \\ = 0{,}414;$$

- среднее число клиентов в системе

$$\overline{N}_{sys} = \overline{N}_{line} + \overline{N}_s = 1{,}191 + 0{,}665 = 1{,}605;$$

- среднее время обслуживания клиента

$$\overline{T}_s = \overline{N}_s/\lambda = 1{,}191/0{,}5 = 2{,}382 \text{ мин};$$

- среднее время пребывания клиента в очереди

$$\overline{T}_{line} = \overline{N}_{line}/\lambda = 0{,}665/0{,}5 = 0{,}828 \text{ мин};$$

- среднее время пребывания клиента в пункте валютного обмена

$$\overline{T}_{sys} = \overline{T}_s + \overline{T}_{line} = 2{,}382 + 1{,}33 = 3{,}21 \text{ мин.}$$

Пример 11. В условиях примера 10 определить, как повлияет на вероятность отказа увеличение числа операторов до трех человек.

Решение. В данном случае число каналов $n = 3$, число мест в очереди $m = 2$; вероятность простоя системы, согласно формуле (13.35)

$$p_0 = [1 + (2/1!)\,0{,}625 + (2^2/2!)\,0{,}625^2 + (2^3/3!)\,0{,}625^3 +$$
$$+ (2^3/3!)\,(0{,}625^4\,(1 - 0{,}625^2)/(1 - 0{,}625)] = 0{,}271.$$

Тогда вероятность отказа равна

$$p_r = p_5 = (2^3/3!)\,0{,}625^5 \cdot 0{,}271 = 0{,}034.$$

По сравнению с предыдущим случаем вероятность отказа изменилась весьма незначительно: теперь из каждых 100 клиентов, обратившихся в пункт, в среднем будет обслуживаться около 97 человек, т. е. характеристика показателя числа обслуживаемых клиентов изменилась в сторону улучшения всего на 2%. По-видимому в данном случае целесообразнее будет не увеличивать число операторов, а уменьшить время обслуживания (увеличить производительность μ обслуживания каждым оператором).

Как видно из разобранных примеров, моделирование работы учреждений, занятых обслуживанием клиентов, дает возможность проведения количественных оценок не только эффективности функционирования самих учреждений, но и целесообразности осуществления тех или иных мероприятий, направленных на улучшение основных показателей.

13.5.4. Одноканальная СМО с ожиданием и ограниченной очередью

Формулы (13.35)–(13.45) легко распространяются на частный случай одноканальной СМО с ожиданием и ограничением на длину очереди. Полагая $n = 1$ и $\psi = \rho$, получаем вероятность простоя системы:

$$p_0 = \begin{cases} \left(\sum\limits_{k=0}^{m+1} \rho^k\right)^{-1} = \dfrac{1 - \rho^{m+2}}{1 - \rho}, & \rho \neq 1; \\ \left(\sum\limits_{k=0}^{m+1} \rho^k\right)^{-1} = \dfrac{1}{m + 2}, & \rho = 1. \end{cases} \qquad (13.46)$$

Вероятности отказа в обслуживании и принятия заявки в систему определяются формулами:

$$p_r = p_{m+1} = \rho^{m+1} p_0; \quad p_{sys} = 1 - \rho^{m+1} p_0. \tag{13.47}$$

Аналогичным образом выводятся остальные характеристики работы одноканальной СМО: в формулах (13.39)–(13.45) нужно только положить $n = 1$ и $\psi = \rho$.

13.6. Многоканальная СМО с ожиданием и неограниченной очередью

13.6.1. Общая схема

Рассмотрим СМО, состоящую из n каналов ($n \geq 1$), с ожиданием и без ограничения на длину очереди и время ожидания. Такие приложения часто встречаются в практике, когда на длину очереди заявок, ожидающих обслуживания, не накладывается никаких ограничений (например, кассы вокзалов и метрополитена, магазины и торговые точки, учреждения здравоохранения пр.). Заявка, поступившая в систему в момент времени, когда все n каналов заняты, становится в очередь и ожидает своего обслуживания; любая поступившая заявка будет обслужена. По-прежнему поток заявок и потоки обслуживания каждым каналом являются простейшими с интенсивностями, соответственно, λ и μ. Данная СМО может находиться в одном из бесконечного множества состояний:

- s_k ($k = 0, 1, ..., n$) — k каналов заняты и очереди нет;
- s_{n+m} ($m = 1, 2, ...$) — все n каналов заняты и в очереди находятся m заявок.

Граф состояний такой СМО аналогичен случаю n-канальной СМО с ожиданием и ограничением на длину очереди с той лишь разницей, что правого крайнего состояния нет, и граф является бесконечным. Предельный (стационарный) режим марковского случайного процесса, протекающего в СМО, будет существовать при условии, что интенсивность обслуживания всех n каналов будет выше интенсивности λ входящего потока, т. е.

$$\lambda < n\mu, \text{ или } \psi < 1. \tag{13.48}$$

Если это условие не выполняется, то очередь заявок в системе будет неограниченно расти с течением времени (переполнение системы).

13.6.2. Основные характеристики СМО

Для получения расчетных формул для основных характеристик СМО нужно перейти к пределу при $m \to \infty$ в формулах (13.35)–(13.41). Вычисляя соответствующие пределы, получаем сначала формулы для вероятностей состояний:

$$p_0 = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} \psi^k + \frac{n^n}{n!} \frac{\psi^{n+1}}{1-\psi} \right)^{-1}; \tag{13.49}$$

$$p_k = \begin{cases} (n^k/k!)\psi^k p_0, & k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n; \\ (n^n/n!)\psi^k p_0, & k = n+1,\ n+2,\ \ldots \end{cases} \tag{13.50}$$

Можно непосредственно проверить, что найденные вероятности удовлетворяют нормировочному условию $p_0 + p_1 + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1.$

Вычисление вероятности отказа приема в заявке, как и следовало ожидать, при предельном переходе при $m \to \infty$ во второй строке формулы (13.50) дает:

$$p_r = 0. \tag{13.51}$$

Тогда вероятность того, что пришедшая заявка будет принята в систему

$$p_{sys} = 1, \tag{13.52}$$

что соответствует исходному предположению о свойстве СМО с неограниченной очередью — любая поступившая заявка будет обслужена.

Существенно упрощаются другие формулы. Приведем их. Относительная пропускная способность системы, согласно (13.38):

$$Q = 1. \tag{13.53}$$

Из (13.39) получаем, что абсолютная пропускная способность СМО определяется только интенсивностью входящего потока:

$$A = \lambda. \tag{13.54}$$

Аналогично получаем из (13.42), что среднее число занятых каналов (заявок, находящихся под обслуживанием), равно показателю нагрузки СМО:

$$\overline{N}_s = \overline{K} = A/\mu = \rho. \qquad (13.55)$$

Наконец, из (13.41) предельным переходом при $m \to \infty$ получаем формулу для среднего числа заявок, находящихся в очереди:

$$\overline{N}_{line} = \frac{n^n}{n!} \frac{\psi^{n+1}}{(1-\psi)^2} p_0. \qquad (13.56)$$

Далее из формул (13.42)–(13.45) получаются остальные характеристики СМО и ее работы.

Частный случай одноканальной СМО с ожиданием и неограниченной очередью получается из формул (13.49), (13.50) и (13.56) при $n = 1$ и $\psi = \rho$:

$$p_k = \rho^k (1 - \rho),\ k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots \qquad (13.57)$$

$$\overline{N}_{line} = \rho^2/(1-\rho). \qquad (13.58)$$

Пример 12. В кассе метрополитена, продающей карточки на проезд, работают два окна. В среднем один кассир тратит на обслуживание одного пассажира 0,5 минуты. В среднем к кассе подходит 3 чел./мин.

Найти основные характеристики работы кассы.

Решение. Касса метрополитена моделируется двухканальной СМО с ожиданием и без ограничения на длину очереди. Параметры системы: $n = 2$, $\lambda = 3$ чел./мин, $\mu = 2$ чел./мин. Нагрузка системы $\rho = \lambda/\mu = 1{,}5$, показатель нагрузки на один канал $\psi = \rho/n = 0{,}75$ — т. е. предельный режим работы системы существует, и возможно осуществить расчет основных характеристик эффективности СМО в данном режиме.

Вероятность простоя системы (оба кассира свободны) равна:

$$p_0 = 1/[1 + 2 \cdot 0{,}75 + (2^2/2!)\ 0{,}75^2 + (2^2/2!)\ 0{,}75^3/(1 - 0{,}75)] = 0{,}143.$$

Среднее число занятых кассиров (среднее число пассажиров под обслуживанием) равно:

$$\overline{N}_s = \overline{K} = A/\mu = \rho = 1{,}5.$$

Среднее число пассажиров в очереди определяется по формуле (13.56):

$$\overline{N}_{line} = (2^2/2!)\ 0{,}75^3/(1 - 0{,}75)^2\ 0{,}143 = 1{,}931.$$

По формуле (13.44) подсчитываем среднее число пассажиров у касс:

$$\overline{N}_{sys} = \overline{N}_{line} + \overline{N}_{s} = 1{,}931 + 1{,}5 = 3{,}431.$$

По формулам Литтла определяем среднее время пребывания пассажира в очереди и среднее время, которое тратит пассажир на приобретение карточки на проезд:

$$\overline{T}_{line} = \overline{N}_{line} / \lambda = 1{,}931/3 = 0{,}644 \text{ мин};$$

$$\overline{T}_{sys} = \overline{N}/\lambda = 3{,}431/3 = 1{,}144 \text{ мин}.$$

Глава 14

Основы реинжиниринга бизнес-процессов

На современном этапе социально-экономических преобразований в России реформирование промышленных предприятий остается одним из приоритетных направлений. Необходимость преобразований обусловлена как текущим состоянием реформирования в стране, так и глубокими переменами в мировой экономике, которые проявляются в процессах глобализации, усиления влияния информационных технологий, повышения скорости бизнес-процессов, возникновении новых типов структур и хозяйственных связей.

В настоящее время идет активное развитие концепций реформирования, наиболее полно учитывающих эти перемены. Одной из таких концепций является реинжиниринг бизнес-процессов (РБП). Российский и мировой опыт его проведения показал, что наряду с положительными результатами реинжиниринг характеризуется высокой степенью риска.

14.1. Необходимость реинжиниринга бизнес-процессов

К факторам, оказывающим влияние на проведение изменений, следует отнести: условия конкурентной борьбы, стремление к снижению издержек и сокращению времени производства, рост объемов информации и внедрение вычислительной техники, использование современных методов принятия управленческих решений, внедрение систем менеджмента качества и т. д. Иными словами, необходимость адаптации к новым условиям хозяйствования обусловливает соответствующие реформы.

Под реструктуризацией будем понимать процесс комплексного изменения методов функционирования предприятия в соответствии с изменяющимися условиями внешней среды и выработанной стратегией. Как правило, реструктуризация проводится за счет внутренних ресурсов предприятия. Обычно различают четыре вида реструктуризации:

- правовая (юридическое закрепление собственности);
- финансовая («расчистка балансов», упорядочение активов, процедуры ликвидации и банкротства);
- организационная (изменение состава и перегруппировка подразделений);
- управленческая (переход от директивных методов к эффективному управлению).

Рассмотрим управленческий аспект проведения реструктуризации. Под организационной структурой управления понимается перечень отделов, служб и подразделений в аппарате управления, их системная организация, характер соподчиненности и подотчетности друг другу и высшему органу управления предприятием, а также набор координационных и информационных связей, порядок распределения функций управления по различным уровням и подразделениям управленческой иерархии. Различают следующие типы структур управления: линейная, функциональная, дивизионная и адаптивная. На подавляющем числе российских предприятий используется смешанная структура управления, на уровне предприятия — линейно-функциональная структура с преобладанием централизованных вертикальных взаимосвязей (рис. 14.1).

В современных условиях хозяйствования указанная жесткая бюрократическая структура оказывается неэффективной в силу ряда причин, основными из которых являются: ограничение ответственности сотрудников за конечный результат работы предприятия в целом; подавляющая часть рабочего времени уходит на передачу результатов от исполнителя к исполнителю; затруднение контроля дублирования выполняемых функций в разных подразделениях; задержки в обмене информацией между подразделениями вследствие корректировки на уровне руководителей подразделений.

В настоящее время проблемы предприятий разделяются на две группы: функциональные и системные. Функциональные проблемы можно разрешить постепенно, путем последовательной адаптации предприятия к изменившимся условиям (эволюционная концепция изменений). Для решения системных проблем необходимы радикальные изменения (революционная концепция). Основное их отличие состоит в том, что эволюционные изменения улучшают существующую организационно-управленческую систему, в то время как революционные изменения заменяют одну систему на другую. Если эволюционные изменения можно проводить плавно и медленно, то революционные — путем проведения реструктуризации.

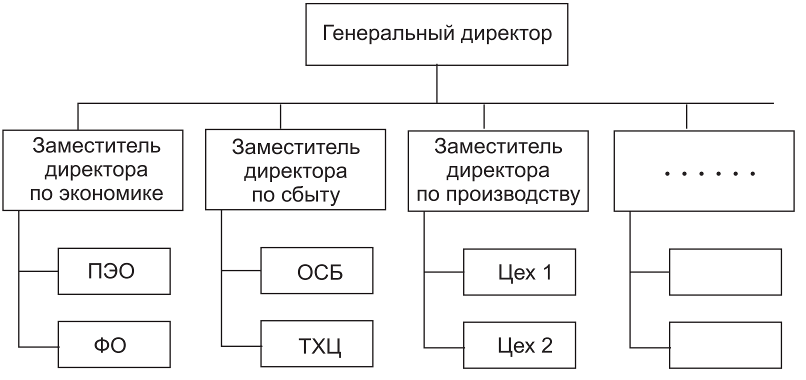


Рис. 14.1

Для российских предприятий характерно преобладание системных проблем, к которым прежде всего следует отнести ориентацию на краткосрочные результаты деятельности в ущерб средне- и долгосрочным, отсутствие стратегического подхода к деятельности предприятия, недостаточное знание текущего и прогнозного состояния рынка, высокие затраты усилий и ресурсов для ориентации на рынке, слабую мотивацию и дисциплину работников, старение основных фондов и технологий, неэффективность использования имеющихся ресурсов.

Одним из методов, определяемых революционной концепцией изменений, является реинжиниринг бизнес-процессов. В табл. 14.1 приводится сопоставление РБП и эволюционной концепции изменений.

Таблица 14.1. Сопоставление концепций изменений

Критерий	Реинжиниринг бизнес-процессов	Эволюционная концепция
Характер изменений	Глубокие и всеохватывающие перемены; изменения крупными скачками	Длительный процесс обучения и развития; изменения мелкими шагами

Критерий	Реинжиниринг бизнес-процессов	Эволюционная концепция
Сильные стороны	Концептуальное единство мероприятий; значительное расширение компетенции сотрудников	Социальная приемлемость; стимулирование самоуправления и самоорганизации
Слабые стороны	Ограничения во времени и действиях; низкая социальная приемлемость	Малая скорость реакции на изменения; завышенные требования к социальной компетенции участников процесса
Методические аспекты	РБП в соответствии с принятой рыночной стратегией, внедрение современных информационных технологий	Структурный и кадровый подход (новые формы организационных структур, изменение моделей поведения сотрудников)

14.2. Основные понятия

Под бизнес-процессом будем понимать совокупность взаимосвязанных функций преобразования входных ресурсов в выходные, определяемую согласно поставленным целям. Цель бизнес-процесса определяет причинно-следственные связи выполняемых функций (рис. 14.2).

Рис. 14.2

Управлять бизнес-процессами можно по двум направлениям.

1. Через качество продукции или информации, «протекающих» внутри; при этом управление будет нацелено на качественное обслуживание потребителей.

2. Через структуру бизнес-процессов, т. е. путем варьирования способов взаимоувязки и согласования функций преобразования входных ресурсов в выходные: изменение порядка выполнения, добавление новых или упразднение бизнес-функций.

Второй тип управления бизнес-процессами соответствует методологии РБП. Впервые эта концепция была сформулирована американскими специалистами по менеджменту М. Хаммером и Дж. Чампи в 1990 г.

Согласно указанной концепции, под реинжинирингом бизнес-процессов будем понимать анализ и коренное перепроектирование существующих бизнес-процессов, в результате чего перераспределяется и минимизируется использование различных ресурсов, повышается качество обслуживания клиентов, упрощается организационная структура предприятия.

Изменение организационной структуры предприятия связано с минимизацией уровней иерархии управления. Чаще всего употребляется выражение «предприятие матричного типа» — объединение нескольких десятков (сотен) самостоятельно действующих подразделений, каждое из которых обладает собственной степенью автономии и деятельность которых нацелена на определенного потребителя. Заметим, что отечественным аналогом методологии реинжиниринга в определенной мере можно считать НОТ — «научную организацию труда».

Типы реинжиниринга классифицируются по группам характеристик.

1. Степень изменений: «мягкий» или «жесткий» реинжиниринг.

«*Мягкий*» РБП — в ходе его реализации происходит совершенствование бизнес-процессов на основе оценки их эффективности. Критериями оценки являются стоимостные и временные затраты выполнения бизнес-процессов, дублирование и противоречивость выполнения отдельных бизнес-функций, степень загруженности сотрудников. «*Жесткий*» РБП подразумевает кардинальное перепроектирование бизнес-процессов. В ходе его реализации ставится под сомнение целесообразность их выполнения.

2. Цели проведения: целевой, жизненного цикла, кризисный.

Целевая модель. На предприятии проводится целевой РБП, при котором бизнес-процессы полностью реорганизуются в соответствии с целями предприятия. Движущей силой здесь служит стремление получить преимущество, а не желание избежать расходов на старое и неэффективное решение.

Модель жизненного цикла. РБП является результатом стремления постоянно переоценивать существующие бизнес-процессы. Изменения происходят постепенно; основные бизнес-процессы в целом не затрагиваются, а лишь слегка видоизменяются и адаптируются к новым требованиям. Часто применяется автоматизация бизнес-процессов, основной упор делается на их упрощение.

Кризисная модель. Проводится на предприятиях, находящихся на грани краха и желающих спасти свое положение. В этом случае реинжиниринг вынуждается определенной ситуацией, и потому он часто проводится наспех и нерационально.

Заметим, что на практике часто применяется симбиоз: кризисная ситуация инициирует реинжиниринг, руководство вырабатывает долгосрочную цель и определяет бизнес-процессы, обеспечивающие ее достижимость. При этом в процессе реинжиниринга цели предприятия неоднократно корректируются.

3. Формы проведения: внутренний реинжиниринг и внешний.

При реализации *внутреннего реинжиниринга* происходит перепроектирование бизнес-процессов согласно существующим требованиям к процессам предприятия (критерии эффективности, цели и задачи РБП и т. д.).

Для совместного перепроектирования бизнес-процессов взаимодействующих предприятий (например, в целях синхронизации цепочек «поставщик — потребитель») проводится *внешний реинжиниринг* с использованием общих согласованных критериев.

14.3. Методика проведения реинжиниринга

Последовательность проведения мероприятий реинжиниринга во многом опирается на системную технологию вмешательства (СТВ), получившую широкое распространение в 80-х гг. XX столетия. Алгоритм СТВ предполагает реализацию трех этапов: диагностику, проектирование, внедрение.

Диагностика текущего состояния предприятия проводится в целях определения источника проблем. На этом этапе производится детальное описание бизнес-процессов и осуществляется построение модели «как есть». Производится сбор детальной информации о структуре предприятия, решаемых задачах, существующих бизнес-процессах и сопутствующих им материальных, финансовых и информационных потоках, взаимодействии с внешним окружением, используемых средствах автоматизации и т. д. Сопоставление результатов анализа с использованием архивного и опросного подхода позволяет описать существующую ситуацию (обратный или ретроспективный инжиниринг). Этот этап диагностики носит название «построение модели “как есть”».

Этап проектирования или формирование желаемого (с точки зрения будущего) образа предприятия. Здесь определяющим является уточнение целей реинжиниринга исходя из состояния «как есть», т. е. осуществляется формализация требований к перепроектируемым бизнес-процессам. Этот этап называют прямым инжинирингом, или построением модели «как должно быть». Информационной базой на данном этапе служат результаты, полученные в процессе построения модели «как есть», а также различные справочные материалы, в том числе и референтные модели, содержащие описания бизнес-процессов для различных типов производств. Следует заметить, что единого перечня бизнес-процессов не существует; каждое предприятие должно разрабатывать свой список. Как правило, он содержит от 15 до 30 основных процессов.

Этап внедрения новой модели в хозяйственную деятельность предприятия является самым сложным в реинжиниринге. Зачастую он так и не реализуется, поскольку требует постоянного подталкивания и преодоления сопротивления.

Существуют другие методики проведения реинжиниринга, в основном они различаются по процедурам проведения третьего завершающего этапа. Так, существует методика, содержащая три этапа: изобретение идеи, развитие, адаптация/диффузия. Первые два этапа идеологически совпадают с рассмотренными выше. Третий этап «адаптация/диффузия бизнес-процессов» происходит по шагам: «осознание», «оценка», «испытание», «внедрение». Благодаря «постепенности» реализации заключительного этапа эта методика выглядит более предпочтительной по сравнению с предыдущей. Однако здесь требуется более длительный срок на внедрение.

Успешность внедрения новых бизнес-процессов зависит от многих факторов. Факторы, влияющие на степень адаптации перепроектированных бизнес-процессов, можно объединить в три группы (табл. 14.2).

Таблица 14.2. Факторы, влияющие на успешность перепроектирования бизнес-процессов

№ п/п	Группа	Факторы
1	Инновационная	Сложность/комплексность новых бизнес-процессов
2	Административная	Каналы распространения информации Организационная структура предприятия Распределение властных полномочий
3	Социальная	Уровень инновационного мышления Социально-экономические условия развития

В концепции проведения изменений *ARIS* предлагается использовать семь этапов (рис. 14.3). На подготовительном этапе формулируются общие цели совершенствования бизнес-процессов и определяются необходимые процедуры. Улучшение начинается с определения стратегических установок предприятия, и бизнес-процессы реформируются таким образом, чтобы они способствовали достижению стратегических целей. Анализ «как есть» подразумевает построение модели предприятия и формализацию бизнес-процессов. На этапе «целевая концепция» формализуются альтернативные варианты бизнес-процессов; описание начинается с анализа слабых мест, далее проводится оценка БП с учетом поставленных целей совершенствования. Этапы «спецификация», «реализация (описание)» связаны с внедрением информационной системы. «Регулярный мониторинг» подразумевает постоянное улучшение бизнес-процессов.

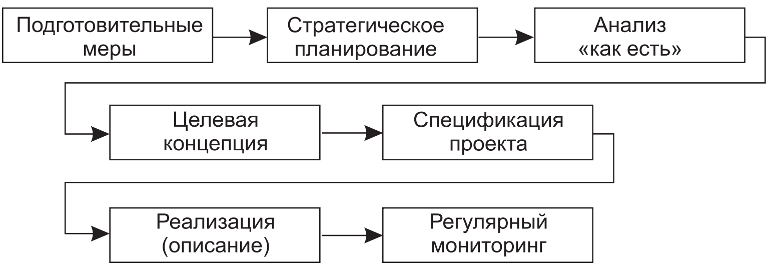


Рис. 14.3

14.4. Проблемы проведения РБП на предприятиях

Реинжиниринг должен начинаться с определения целей, которые должны быть достигнуты в результате его проведения, анализа целей предприятия, исследования критических факторов успеха (КФУ) и установления взаимосвязи с бизнес-процессами, направленными на их достижение. Под критическими факторами успеха будем понимать цели, непосредственно вытекающие из заявленной главной цели предприятия.

Для предприятия, действующего в условиях рынка, совокупность целей можно представить в агрегированном виде:

- экономические цели (например, достижение максимальной прибыли);

- технические (например, обеспечение необходимого уровня качества продукции);
- производственные цели;
- социальные цели;
- экологические цели.

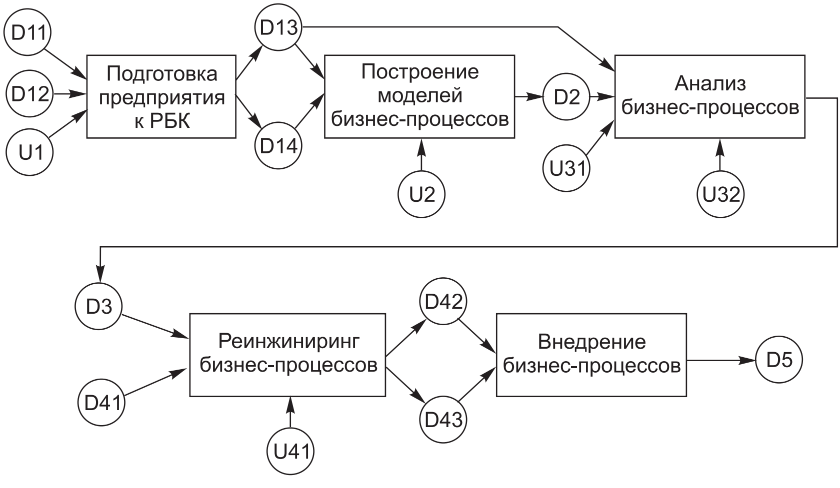


Рис. 14.4

Соответственно целям можно определить КФУ, которые могут носить как количественный характер (повышение производительности, сокращение издержек и времени цикла выполнения), так и качественный (повышение качества продукции, гибкость управления). Определение и анализ КФУ позволит выявить бизнес-процессы, которые необходимо подвергнуть реинжинирингу. С учетом вышеизложенного можно построить технологическую сеть реинжиниринга бизнес-процессов (рис. 14.4).

На этапе «Подготовка предприятия к РБП» путем анализа целей предприятия (D11) и на основе материалов предварительного обследования (D12) с использованием существующих методов проведения реинжиниринга (U1) определяются критические факторы успеха (D13) и цели реинжиниринга (D14). «Построение моделей бизнес-процессов» осуществляется с использованием инструментальных средств моделирования бизнес-процессов (U2). Результатом выполнения являются модели бизнес-процессов (D2). «Анализ бизнес-процессов» будет направлен на получение детализированных бизнес-процессов с «узкими местами» (D3) и подразумевает сравнение с метриками эталонных бизнес-процессов (U31), а также применение доступных методов (имитационный, стоимостный и т. д.) (U32).

Для проведения РБП необходима модель организационной структуры предприятия (D41) и знания референтных моделей предприятий отрасли (U41). В результате реинжиниринга должны быть получены описания новых бизнес-процессов (D42), а также новые должностные инструкции сотрудников, вовлеченных в перепроектированные бизнес-процессы (D43).

В результате внедрения должны быть получены перепроектированные бизнес-процессы предприятия (D5).

Реинжиниринг характеризуется высоким уровнем риска. Риск в данном случае можно трактовать как вероятность (угрозу) потери предприятием части своих ресурсов, недополучения доходов или появления дополнительных расходов в результате радикального перепроектирования бизнес-процессов.

Риск можно разделить на две категории: первая связана с изменением бизнес-процессов, вторая обусловлена используемой методикой проведения (т. е. выбранная методическая основа может не соответствовать специфике и масштабам РБП). Высокая степень риска также обусловлена действием объективных и субъективных факторов. Объективные факторы не зависят непосредственно от реинжиниринга: налоги, инфляция, экология и т. п. К субъективным факторам следует отнести:

- уровень формализованного представления бизнес-процессов предприятия;
- действия сотрудников, реализующих мероприятия по РБП;
- заниженный объем финансирования проекта;
- потенциал предприятия для трансформации.

Реинжиниринг тем успешнее, чем выше уровень регламентации существующих бизнес-процессов предприятия. Тогда построение модели «как есть» не требует дополнительных усилий по выделению и описанию бизнес-процессов. Для предприятий с низким уровнем формализации проведение РБП усложняется, поскольку множество бизнес-процессов, допускающих или требующих описания, увеличивает размерность задачи поиска наилучшего варианта перепроектирования. Учет человеческого фактора имеет подчас не менее значимую роль, чем технологический фактор, поскольку успех проекта и жизнеспособность новых бизнес-процессов зависят от работников. Изменения проводятся легче при разработке и внедрении программ повышения квалификации сотрудников.

Предположим, что целью реинжиниринга является новое состояние бизнес-процессов предприятия, которое оценивается с некоторых позиций. Результат реинжиниринга — это состояние бизнес-процессов, достигнутое за счет их перепроектирования и являющееся результатом реализации цели или ее части. Затраты представляют собой объем ресурсов, израсходованных на его проведение. Тогда можно определить три вида эффективности реинжиниринга: результативность как степень реализации целей; полезность — разницу между ценностью достигнутого результата и затратами на его достижение; экономичность — отношение полезного результата реинжиниринга к средствам, затраченным на его реализацию.

14.5. Экономико-математическое обеспечение РБП

Во многих случаях реинжиниринга выбор бизнес-процессов осуществляет группа экспертов; при этом возникает далеко не простая задача согласования противоречивых оценок. Поэтому целесообразно использовать формальные методы анализа с привлечением математического аппарата для обработки результатов коллективных решений. Традиционно выделяются два типа процецур согласования решений: процедура с личным контактом между экспертами и многоуровневые процедуры без личных контактов с контролируемой обратной связью. Первый тип процедуры обладает рядом недостатков: возможное взаимовлияние экспертов (особенно при наличии лидера), нередко дискуссия приобретает характер полемики наиболее авторитетных экспертов и т. д.

Второй тип предполагает изолированность экспертов, а процедура согласования реализуется за несколько разделенных во времени итераций. В качестве примера приведем метод «Делфи», суть которого заключается в следующем. После исследования оцениваемого объекта опрос экспертов проводится в несколько итераций. На первой каждый эксперт дает числовую оценку. После этого подсчитывается и сообщается экспертам средняя оценка и показатель разброса оценок. Экспертов, давших крайние оценки, просят дать письменное обоснование своих мнений, с которыми знакомят остальных экспертов, после чего проводится вторая итерация опроса. Характерной особенностью метода является уменьшение от итерации к итерации разброса оценок экспертов и возрастание их согласованности.

Каждый эксперт получает таблицу-опросник, в которой перечислены КФУ предприятия (столбцы) и бизнес-процессы (строки). Таблицу эксперт заполняет самостоятельно независимо от других, т. е. проводится индивидуальный опрос членов экспертной комиссии.

Предположим, что имеется k экспертов, оценивающих m бизнес-процессов и их влияние на n критических факторов успеха предприятия.

Проблема определения бизнес-процессов и, соответственно, формирования таблицы-вопросника решается специалистами консультационной фирмы, исходя из их опыта и знаний. Задача же специалистов предприятия заключается в выборе бизнес-процессов для реинжиниринга на основе влияния БП на критические факторы успеха.

Строится матрица Q размерности $m \times n$:

$$Q = ||q_{ij}|| = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \dots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \dots & q_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_{m1} & q_{m2} & \dots & q_{mn} \end{pmatrix}. \tag{14.1}$$

где m — число бизнес-процессов предприятия, n — количество КФУ, q_{ij} — оценка влияния i-го бизнес-процесса на j-й критический фактор успеха. Значимость каждого $БП_i$ в реализации критического фактора успеха $КФУ_j$ оценивается экспертом. На пересечении горизонтальной строки $БП_i$ и вертикального столбца $КФУ_j$ записывается оценка q_{ij}, принадлежащая интервалу [0, 1]. Эту оценку эксперта можно трактовать как вероятность влияния i-го бизнес-процесса на достижимость j-го критического фактора успеха. Нулевая оценка в соответствующей клетке матрицы означает, что эксперт затрудняется дать оценку.

Экспертам предлагается единая базовая шкала оценки влияния бизнес-процессов на КФУ. На интервале [0, 1] изменения вероятностной оценки как лингвистической переменной устанавливаются базовые числа, соответствующие ее значениям. Например:

0,1 — бизнес-процесс очень слабо влияет на критический фактор успеха;

0,3 — БП слабо влияет на КФУ;

0,5 — БП умеренно влияет на КФУ;

0,8 — БП сильно влияет на КФУ;

0,9 — БП очень сильно влияет на КФУ.

Следует заметить, что при заполнении матрицы Q эксперт может указывать как указанные значения вероятностной оценки, так и промежуточные значения.

Таким образом, для k экспертов имеем k матриц Q^1 вида (14.1), где $l = 1, \ldots k$ — номер эксперта:

$$Q^l = \| q_{ij}^l \| = \begin{pmatrix} q_{11}^l & q_{12}^l & \cdots & q_{1n}^l \\ q_{21}^l & q_{22}^l & \cdots & q_{2n}^l \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ q_{m1}^l & q_{m2}^l & \cdots & q_{mn}^l \end{pmatrix}. \tag{14.2}$$

Здесь q_{ij}^l — оценка, данная l-м экспертом i-го бизнес-процесса для j-го критического фактора успеха.

Определим средние оценки влияния i-го бизнес-процесса на достижимость j-го КФУ:

$$\bar{q}_{ij} = \frac{1}{k} \sum_{l=1}^{k} q_{ij}^l. \tag{14.3}$$

Теперь составляется матрица средних оценок

$$\overline{Q} = \| \bar{q}_{ij} \|, \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m; \quad j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n. \tag{14.4}$$

Дальнейший анализ матрицы $\overline{Q}$ зависит от целей реинжиниринга и, соответственно, от набора отслеживаемых критических факторов успеха.

Следует отметить, что осреднение результатов является одним из самых распространенных вариантов согласования противоречивых оценок экспертов. В рассмотренном подходе осреднение мнений экспертов проводилось без учета их квалификации («вес» экспертной оценки). Для определения весовых коэффициентов рекомендуется использовать иерархическую структуру критериев.

Введем меру вариативности оценок, данных экспертами (аналог дисперсии случайной величины):

$$d_{ij} = \frac{1}{k-1}\sum_{l=1}^{k}(q_{ij}^{l} - \bar{q}_{ij})^2; \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m;\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n. \quad (14.5)$$

В предельном случае $d_{ij} = 0$, что означает единодушие экспертов в оценке влияния i-го бизнес-процесса на j-й критический фактор успеха. Выбор бизнес-процессов для реинжиниринга проводится на основе матрицы $\overline{Q}$; перепроектированию должны быть подвергнуты те бизнес-процессы, которые имеют максимальные интегральные оценки.

По сути дела меры вариативности представляют собой исправленные дисперсии выборок размера k. Они могут быть объединены в матрицу вариативности типа (14.2) размерности $m \times n$.

Интегральная оценка бизнес-процесса определяется по матрице $\overline{Q}$ построчно как алгебраическая сумма средних оценок. Если критическим факторам успеха приписаны определенные веса α_j, то эта оценка определяется по формуле:

$$Q_i = \sum_{j=1}^{n}\alpha_j \bar{q}_{ij}. \quad (14.6)$$

Интегральные оценки ранжируют бизнес-процессы: чем значимее бизнес-процесс, тем больше его интегральная оценка.

В случае когда мнения экспертов не совпадают, уместно ввести в рассмотрение также коэффициент вариации, показывающий долю среднего разброса в среднем значении оценки $\bar{q}_{ij}$:

$$\nu_{ij} = \sqrt{d_{ij}} \Big/ |\bar{q}_{ij}|; \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m;\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n. \quad (14.7)$$

Чем больше коэффициент вариации, тем сильнее различаются взгляды экспертов на влияние i-го бизнес-процесса на j-й КФУ. Величины вариативности оценок позволяют выявить совокупность бизнес-процессов, требующих дополнительного исследования (например, последующей детализации). Опыт практической работы показал следующий вариант распределения значений коэффициентов вариации с указанием степени согласованности:

$\nu_{ij} \le 0{,}1$ — высокая согласованность;

$\nu_{ij} = 0{,}11 \div 0{,}15$ — согласованность выше средней;

$\nu_{ij} = 0{,}16 \div 0{,}25$ — согласованность средняя;

$\nu_{ij} = 0{,}26 \div 0{,}35$ — согласованность ниже средней;

$\nu_{ij} \geq 0{,}35$ — низкая согласованность.

Коэффициенты вариации можно свести в соответствующую матрицу вариации по типу (14.2) как компактное представление оценки мнений экспертов:

$$N = ||\nu_{ij}||;\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m;\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n. \qquad (14.8)$$

Следует заметить здесь, что экспертные методы являются в значительной мере субъективными, так как их результаты существенно зависят от подбора состава экспертов и условий их работы, а также от исходной таблицы-вопросника. Предлагаемый подход носит формализованный характер, обусловленный математической обработкой согласования коллективных оценок. Для повышения обоснованности решений необходим разносторонний анализ бизнес-процессов, основанный как на расчетах, так и на аргументированных суждениях специалистов и руководства предприятия (что, впрочем, может быть формально включено в матрицы экспертных оценок с соответствующими весами).

Кроме критических факторов успеха в базу выбора бизнес-процессов могут быть включены следующие критерии:

- ожидания клиентов по отношению к бизнес-процессам;
- продолжительность выполнения; бизнес-процессы, не отвечающие условиям возрастающей скорости протекания, должны быть перепроектированы;
- стоимости; реинжиниринг может быть также направлен на минимизацию стоимости выполнения бизнес-процессов.

14.6. Инструментальные средства проведения реинжиниринга

В настоящее время предприняты попытки выработать стандартное представление бизнес-процессов. Сформировалось несколько направлений, разрабатываемых различными коммерческими и государственными организациями, научными объединениями и консорциумами США, Канады, Германии и ряда других стран. Многообразие полученных результатов определяет богатство инструментальных средств их поддержки, основой которых являются подходы к моделированию бизнес-процессов. Заметим, что выбор подхода и, соответственно, инструментального средства зависит от целей проведения реинжиниринга.

Современные инструментальные средства, обеспечивающие проведение реинжиниринга бизнес-процессов, можно разделить на пять категорий:

- инструментальные средства создания диаграмм и инструментарий низкого уровня;
- CASE-средства, структурный и объектно-ориентированный инструментарий;
- средства стоимостного анализа;
- средства имитационного моделирования (анимации);
- интегрированные многофункциональные средства.

Отметим, что приведенная классификация инструментальных средств базируется на существующих методах анализа бизнес-процессов.

Инструментарий первой категории носит описательный характер и предоставляет ограниченные возможности по графическому представлению бизнес-процессов предприятия; как правило, он используется на этапе построения модели бизнес-процессов «как есть» (Visio (Microsoft), iGrafxProcess (Micrografx), MetaDesign (Meta Software) и ряд других). Наибольший эффект связан непосредственно с деятельностью по разработке моделей и определению бизнес-процессов. Окончательный вариант представляет собой коллективную модель бизнеса и является отправной точкой для проведения реинжиниринговых мероприятий. Промежуточные обсуждения вариантов диаграмм способствуют процессу взаимного обучения сотрудников.

Вторую категорию инструментальных средств составляют CASE-средства, структурный и объектно-ориентированный инструментарий. Указанные средства ориентированы на разработчиков информационных систем и часто не учитывают особенности моделирования РБП (определение целей реинжиниринга, описание организационной структуры предприятия и т. п.). В том случае, когда реинжиниринг проводится в целях внедрения информационных систем, целесообразность использования CASE-средств не вызывает сомнений.

Под стоимостным анализом (*activity based costing*, или ABC-анализ) понимается метод определения стоимости и других характеристик продуктов и услуг, производимых хозяйствующими субъектами и реализуемых на рынке, на базе функций и ресурсов, составляющих бизнес-процессы. ABC-анализ распределяет накладные расходы в соответствии с полученными данными о потребляемых ресурсах и их влиянием на себестоимость. Суть стоимостного анализа состоит в разбиении бизнес-процесса на элементарные подпроцессы (функции), определение стоимости единовременного выполнения каждого подпроцесса и вычисление стоимости всего бизнес-процесса с помощью соответствующих коэффициентов. Использование ABC-анализа позволяет получить сведения о реальной стоимости услуг и продукции, о распределении накладных издержек между бизнес-процессами предприятия, о готовности клиентов заплатить за данные услуги или продукцию. Для проведения ABC-анализа широко используются инструментальные средства ARIS ABC (ARIS Scheer AG), Easy ABC (ABC Technologies).

Средства имитационного моделирования и анимации обеспечивают наиболее полный анализ динамики бизнес-процессов. Имитационные модели описывают основные ее компоненты: потоки сущностей, информации и управления, различные метрики (частоту появления заявок, время выполнения рабочих процедур и т. д.). При отустствии анимации модели могут быть графическими или аналитическими. При имитационном анализе используются инструментальные средства BPSimulator (System modelling), ARIS Simulation (IDS Scheer AG).

В последнюю пятую категорию входят инструментальные средства, обеспечивающие максимальный объем возможностей анализа бизнес-процессов при проведении РБП. Этот инструментарий обладает хорошим методологическим обеспечением и предоставляет возможность работы с репозитарием бизнес-процессов и проведения различных видов анализа. Встроенные средства визуализации обеспечивают возможность моделирования вариантов бизнес-процессов, позволяют формировать отчеты по моделям, производить семантическую проверку бизнес-логики. К числу наиболее популярных интегрированных многофункциональных средств, используемых в России, относятся Rethink (Gensym), ARIS Toolset (IDS Scheer AG).

Схематически возможности перечисленных инструментальных средств показаны на рис. 14.5.

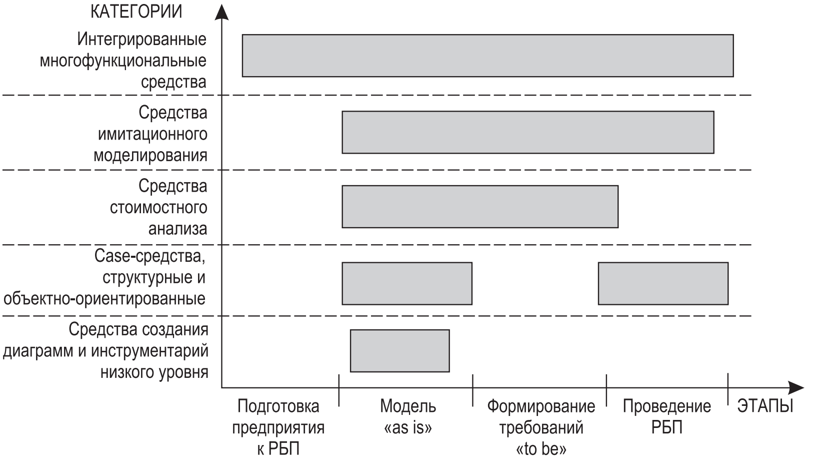


Рис. 14.5

В целом инструментальные средства, используемые при реинжиниринге, должны обеспечивать следующие требования.

1. Регистрацию информации о бизнес-процессах.
2. Контроль синтаксиса бизнес-процессов. Хотя бизнес-процесс с его окружением существует объективно, детализация процесса диктуется разработчиком. Корректность с точки зрения формального синтаксиса становится менее важной, поскольку модели предназначены прежде всего для использования.
3. Ведение репозитария бизнес-процессов. Над разработкой моделей бизнес-процессов обычно работает группа специалистов, при этом каждый из них «наращивает» сделанное предшественниками. Поэтому необходимо, чтобы инструментарий позволял отслеживать историю создания моделей.
4. Генерацию административно-управленческой документации (в том числе должностных инструкций и регламентов работы). Это требование к автоматическому формированию документации по разработанным моделям бизнес-процессов обусловлено спецификой реинжиниринга.

В заключение этого раздела отметим следующее. Постановка автоматического реинжиниринга бизнес-процессов и создания новой организационной структуры не представляется возможной, так как практика РБП предполагает исследование широких пределов изменения бизнес-процессов. Проведение многофакторного анализа с плохо формализуемыми данными выходит за границы возможностей существующих инструментальных средств. В целом они ориентированы лишь на всесторонний анализ перепроектированных бизнес-процессов и моделей, предложенных разработчиком.

РАЗДЕЛ 4

ОСНОВЫ ФИНАНСОВОЙ МАТЕМАТИКИ

Глава 15

Математические модели финансовых вычислений

В настоящее время заметно возрос интерес к финансовой сфере деятельности, однако далеко не все заинтересованные лица могут выполнить необходимые финансовые расчеты, особенно в тех случаях, когда производится анализ платежей, разнесенных во времени или составляющих последовательность регулярно повторяющихся выплат. До настоящего времени в нашем обществе мало использовались векселя, акции и другие ценные бумаги. Основная масса людей пока еще плохо информирована о разнообразных формах получения процентных денег. В связи с этим представляется целесообразным рассмотрение методов финансовых вычислений.

Любая финансовая, кредитная или коммерческая операция предполагает совокупность условий, согласованных ее участниками. К таким условиям относятся: сумма кредита, займа или инвестиций, цена товара, сроки, способы начисления процентов и погашения долга и т. д.

Совместное влияние на финансовую операцию многих факторов делает конечный ее результат неочевидным. Для его оценивания необходим специальный количественный анализ. Совокупность методов расчета и составляет предмет финансовой математики.

Количественный финансовый анализ имеет целью решение широкого круга задач — от элементарного начисления процентов до анализа сложных кредитных и коммерческих операций. В нем рассматриваются основные понятия, которыми оперируют в финансовых вычислениях, такие как процент, ставка процента, учетная ставка, современная (текущая) стоимость платежа и т. д., методы наращения и дисконтирования платежей, принципы, лежащие в основе финансовых вычислений, современная практика расчетов.

В учебное пособие вошли также основы количественного анализа последовательности платежей, в частности, — финансовых рент. Потоки денежных платежей часто встречаются в практике. Например, регулярные взносы для формирования какого-либо фонда (инвестиционного, страхового, пенсионного, для погашения долга), периодическая уплата процентов, доходы по облигациям или ценным бумагам, выплата пенсий, поступление доходов от коммерческой или предпринимательской деятельности и т. д.

Материалы учебного пособия могут быть применены в расчетах любых финансовых операций: в анализе инвестиционных проектов, расчете кредитных и коммерческих операций, эффективности предпринимательской деятельности, работе с ценными бумагами, в страховом деле.

Следует отметить, что развитием и систематизацией финансовых расчетов, их внедрением в практику и образование занимались еще в дореволюционной России. Профессором Н. С. Лунским была разработана программа курса «Высшие финансовые вычисления» и выпущен ряд учебников для ее реализации, представляющих определенный интерес и в настоящее время.

По мере строительства планового социалистического хозяйства в СССР значимость блока финансовых дисциплин была существенно принижена. Курс финансовой математики в учебных заведениях был выхолощен. Однако с формированием рыночных отношений, развитием информационных технологий в бизнесе и финансах, развитием теории экономического анализа, возникла необходимость проведения математических расчетов, для осуществления которых необходимы специальные познания. Поэтому повышение финансово-аналитической подготовки экономистов является необходимым условием развития России на пути рыночных отношений.

15.1. Простые проценты

В практических финансовых и коммерческих операциях суммы денег обязательно связываются с некоторыми конкретными моментами или интервалами времени. Для этого в контрактах фиксируются соответствующие сроки, даты, периодичность поступлений денежных средств, их выплат.

Фактор времени играет не меньшую роль, чем размеры денежных сумм. Необходимость учета фактора времени определяется *принципом не-*

равноценности денег, относящихся к разным моментам времени. Так как даже в условиях отсутствия инфляции и риска 1 тыс. руб., полученных через год, не равноценна этой же сумме, поступившей сегодня. Неравноценность определяется тем, что теоретически любая сумма денег может быть инвестирована и принести доход. Поступившие доходы в свою очередь могут быть реинвестированы и т. д. Поэтому «сегодняшние» деньги в этом смысле ценнее будущих, а будущие поступления менее ценны, чем современные.

Очевидным следствием *принципа неравноценности денег* является неправомерность суммирования денежных величин, относящихся к разным моментам времени. Подобного рода суммирование допустимо лишь там, где фактор времени не имеет значения — например, в бухучете для получения итогов по периодам и в финансовом контроле.

В финансовых вычислениях фактор времени учитывается в качестве одного из важнейших элементов. Его учет осуществляется с помощью начисления процентов.

Под *процентными деньгами*, или процентами, в финансовых расчетах понимают абсолютную величину дохода от предоставления денег в долг в любой форме: в виде выдачи денежной ссуды, продажи в кредит, помещении денег на депозитный счет, при учете векселя, при покупке сберегательного сертификата или облигаций и т. д.

При заключении финансового или кредитного соглашения стороны (кредитор и заемщик) договариваются о размере *процентной ставки* — отношения суммы процентных денег, выплачиваемых за фиксированный отрезок времени, к величине ссуды. Интервал времени, к которому относится процентная ставка, называют *периодом начисления*. Ставка измеряется в процентах, а также в виде десятичной или натуральной дроби.

Начисление процентов, как правило, производится дискретно, т. е. в отдельные моменты времени, причем в качестве периодов начисления принимают год, полугодие, квартал, месяц. Иногда практикуют ежедневное начисление, а в ряде случаев удобно применять *непрерывные проценты*.

Проценты или выплачиваются кредитору по мере их начисления, либо присоединяются к сумме долга в соответствии с условиями договора. Процесс увеличения денег в связи с присоединением процентов к сумме долга называют *наращением*.

В количественном финансовом анализе процентная ставка применяется не только как инструмент наращения суммы долга, но и в более широком смысле — как измеритель степени доходности финансовой операции.

В практике существуют различные способы начисления процентов, зависящие от условий контрактов. Соответственно применяют различные виды процентных ставок. Одно из основных отличий связано с выбором исходной суммы для начисления процентов. Ставки процентов могут применяться к одной и той же начальной сумме на протяжении всего срока ссуды или к сумме с начисленными в предыдущем периоде процентами. В первом случае они называются *простыми,* а во втором — *сложными процентными ставками.*

Процентные ставки, указываемые в контрактах, могут быть *постоянными* или *переменными («плавающими»).* В этом случае значение ставки равно сумме некоторой изменяющейся во времени базовой величины и надбавки к ней, которую называют *маржа.* Размер маржи определяется рядом условий, например, сроком операции и обычно он находится в пределах 0,5–5%. В контракте может оговариваться и переменный во времени размер маржи.

Рассмотрим методы анализа сделок, в которых предусматриваются разовые платежи при выдаче и погашении кредита или депозита. Задачи такого анализа сводятся к расчету наращенной суммы, суммы процентов и размера дисконта, современной величины (текущей стоимости) платежа, который будет произведен в будущем.

Часто в коммерческих расчетах используют понятия проценты, которые имеют обозначение «со 100», «на 100», «во 100».

Процентами «со 100» называют отношение суммы процентных денег (I) к наращенной сумме (S).

Процентами «на 100» называют отношение суммы процентных денег (I) к первоначальной сумме (P).

Процентами «во 100» называют отношение суммы процентных денег (I) к разности между первоначальной суммой (P) и суммой процентных денег (I).

15.1.1. Проценты и процентные ставки

Под *наращенной суммой* ссуды (долга, депозита и т. д.) понимается ее первоначальная сумма вместе с начисленными на нее процентами к концу срока.

Пусть P первоначальная сумма денег, i — ставка простых процентов. Начисленные проценты за один период равны Pi, а за n периодов — Pni.

Процесс изменения суммы долга с начисленными простыми процентами можно представить в виде арифметической прогрессии, членами которой являются величины

P; $P + Pi = P(1 + i)$; $P(1 + i) + Pi = P(1 + 2i)$ и т. д. до $P(1 + ni)$. Первый член этой прогрессии равен P, разность — Pi, тогда последний член является наращенной суммой

$$S = P(1 + ni). \tag{15.1}$$

Формула (15.1) является *формулой наращения по простым процентам*, или *формулой простых процентов*.

Множитель $(1 + ni)$ в формуле (15.1) называется *множителем наращения*. Он показывает во сколько раз наращенная сумма больше первоначальной суммы.

Наращенную сумму можно представить в виде двух слагаемых: первоначальной суммы P и суммы процентов I

$$S = P + I, \tag{15.2}$$

где

$$I = Pni. \tag{15.3}$$

Процесс роста суммы долга по простым процентам представим графически (рис. 15.1). При начислении простых процентов по ставке i за базу берется первоначальная сумма долга. Наращенная сумма S изменяется линейно в зависимости от времени.

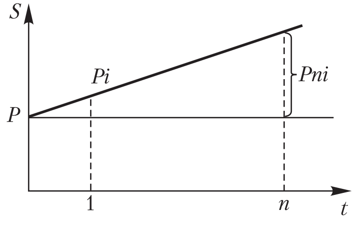


Рис. 15.1

Пример 1. Определить сумму процентов и накопленного долга, если ссуда в 200 тыс. руб. была получена на срок 0,5 года при ставке простых процентов, равной 12% годовых.

По имеющимся исходным данным найти проценты «со 100», «на 100», «во 100».

Решение.

$$I = Pni = 200 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}12 = 12 \text{ тыс. руб.}$$

$$S = P + I = 200 \text{ тыс. р.} + 12 \text{ тыс. р.} = 212 \text{ тыс. руб.}$$

$$\text{Проценты «со 100»} = I/P = 12/200 = 0{,}06.$$

$$\text{Проценты «на 100»} = I/S = 12/212 = 0{,}0566.$$

$$\text{Проценты «во 100»} = I/(P - I) = 12/188 = 0{,}0638.$$

Ответ. Сумма процентов составляет 12 тыс. руб., сумма накопленного долга 212 тыс. руб.

Проценты «со 100» составляют 6%, проценты «на 100» равны 5,66%, проценты «во 100» составляют 6,38%.

Начисление простых процентов обычно используется в двух случаях: при заключении краткосрочных контрактов (предоставлении краткосрочных кредитов и т. п.), срок которых не превышает одного года, и тогда, когда проценты не присоединяются к сумме долга, а выплачиваются периодически.

Ставка процентов обычно устанавливается в расчете на год, поэтому при продолжительности операции менее года необходимо выяснить, какая часть процентов уплачивается кредитору. Для этого величину n выражают в виде дроби

$$n = t/K, \tag{15.4}$$

где n — срок ссуды в долях года;

K — число дней в году (временная база);

t — срок операции (ссуды) в днях.

В этом случае наращенная сумма вычисляется по формуле:

$$S = P\,(1 + it/K). \tag{15.5}$$

Возможно несколько вариантов расчета процентов, различающихся выбором временной базы K и способом измерения срока пользования ссудой.

Часто за базу измерения времени берут год, условно состоящий из 360 дней (12 месяцев по 30 дней в каждом). В этом случае говорят, что вычисляют *обыкновенный*, или *коммерческий процент*. В отличие от него *точный процент* получают, когда за базу берут действительное число дней в году: 365 или 366, если год високосный.

Определение числа дней пользования ссудой также может быть *точным* или *приближенным*. В первом случае вычисляют фактическое число дней между двумя датами, во втором — продолжительность ссуды определяется числом месяцев и дней ссуды, приближенно считая все месяцы равными и содержащими по 30 дней. В обоих случаях дата выдачи и дата погашения долга считается за один день.

Подсчет точного числа дней между двумя датами можно осуществить, взяв разность этих дат, или с помощью специальной таблицы, в которой представлены порядковые номера дат в году (см. Приложение 1).

Различные варианты временной базы и методов подсчета дней ссуды, приводят к следующим схемам расчета процентов, применяемых на практике:

- точные проценты с точным числом дней ссуды (британская схема 365/365, когда в году считается 365 дней, полугодие приравнивается к 182 дням и длительность месяцев точная). Используется в Великобритании, США, Португалии;
- обыкновенные проценты с точным числом дней ссуды (французская схема 365/360, в году принимается 360 дней и точная длительность месяцев). Используется во Франции, Бельгии, Испании;
- обыкновенные проценты с приближенным числом дней ссуды (германская схема 360/360, считается, что в году 360 дней и 30 дней в каждом месяце). Используется в Германии, России, США.

Поскольку точное число дней ссуды в большинстве случаев больше приближенного, то величина процентов с точным числом дней обычно больше, чем с приближенным.

Вариант расчета с точными процентами и приближенным измерением времени ссуды не применяется.

Точное и приближенное число дней для обыкновенных процентов связаны следующими зависимостями:

$$i_{360} = 0{,}986301 \cdot i_{365};\ i_{365} = 1{,}013889 \cdot i_{360}.$$

Пример 2. Найти точное и приближенное число дней между 5 марта и 28 сентября.

Решение. По таблице (см. Приложение 1) 28 сентября является 271 днем, а 5 марта — 64 днем года. Поэтому точное число дней составляет

$$271 \text{ дн.} - 64 \text{ дн.} = 207 \text{ дн.}$$

Найдем приближенное число дней между 5 марта и 28 сентября, считая, что в марте по сентябрь содержится по 30 дней

$$5 \text{ мес.} \cdot 30 \text{ дн.} + (30 \text{ дн.} - 5 \text{ дн.}) + 28 \text{ дн.} = 203 \text{ дн.}$$

Ответ. Между 5 марта и 28 сентября точное число дней составляет 207, приближенное — 203.

Пример 3. Депозит в размере 3000 руб. положен в банк под 10% годовых с 3 апреля по 29 ноября следующего года (год не високосный). Определить тремя способами наращенную сумму. Какой вариант наращения выгоден банку, а какой вкладчику?

Решение. Наращенную сумму найдем по формуле (15.5). Рассмотрим различные варианты расчета:

1. Точные проценты с точным числом дней депозита.

Точное количество дней — 604, временная база — 365 дней, тогда

$$S_1 = 3000\ (1 + 0{,}1 \cdot 604/365) = 3496{,}4 \text{ руб.}$$

2. Обыкновенные проценты с точным числом дней депозита.

Точное количество дней — 604, временная база — 360 дней, тогда

$$S_2 = 3000\ (1 + 0{,}1 \cdot 604/360) = 3503{,}3 \text{ руб.}$$

3. Обыкновенные проценты с приближенным числом дней депозита

$$S_3 = 3000\ (1 + 0{,}1 \cdot 595/360) = 3495{,}8 \text{ руб.}$$

Ответ. $S_1 = 3496{,}4$ руб., $S_2 = 3503{,}3$ руб., $S_3 = 3495{,}8$ руб. Банку выгоден третий вариант расчета наращения. Вкладчику — второй вариант расчета наращения.

Процентные ставки не остаются неизменными во времени, в кредитных соглашениях иногда предусматриваются дискретно изменяющиеся процентные ставки. В этом случае формула расчета наращенной суммы принимает следующий вид:

$$S = P\,(1 + n_1 i_1 + n_2 i_2 + \ldots + n_k i_k) = P\left(1 + \sum_{t=1}^{k} n_t i_t\right), \qquad (15.6)$$

где P — первоначальная сумма (ссуда);

k — число периодов начислений;

i_t — ставка простых процентов в периоде с номером t, $t = 1, k$;

n — продолжительность t периода начисления по ставке i_t, $i = 1, k$.

Пример 4. В договоре, рассчитанном на год, принята ставка простых процентов на первый квартал в размере 8% годовых, а на каждый последующий квартал на 0,5% меньше, чем в предыдущий. Определить множитель наращения за весь срок договора.

Решение.

$$K_{\text{нар.}} = 1 + \Sigma\, n_t i_t = 1 + 0{,}25 \cdot 0{,}08 + 0{,}25 \cdot 0{,}075 + 0{,}25 \cdot 0{,}07 + 0{,}25 \cdot 0{,}065 = \\ = 1 + 0{,}25\,(0{,}08 + 0{,}075 + 0{,}07 + 0{,}065) = 1{,}0725,$$

где $K_{\text{нар.}}$ — множитель наращения.

Ответ. Множитель наращения составляет 1,0725.

Сумма депозита, полученная в конце обозначенного периода вместе с начисленными на нее процентами, может быть вновь инвестирована под эту или другую процентную ставку. Процесс *реинвестирования* иногда повторяется неоднократно в пределах расчетного срока N. В случае многократного инвестирования в краткосрочные депозиты и применения простой процентной ставки наращенная сумма для всего срока N находится по формуле

$$S = p\,(1 + n_1 i_1)(1 + n_2 i_2)\ldots(1 + n_k i_k) = \prod_{t=1}^{k}[P\,(1 + n_t i_t)], \qquad (15.7)$$

где n_1, n_2, ..., n_t — продолжительности последовательных периодов реинвестирования

$$N = \sum_{t=1}^{k} n_t,$$

i_1, i_2, ..., i_t — ставки, по которым производится реинвестирование.

Пример 5. На сумму 100 тыс. руб. начисляются 10% годовых. Проценты простые, точные (год не високосный). Определить наращенную сумму в случаях, если операция реинвестирования проводится в течение первого квартала и если реинвестирование не проводится.

Решение. Вычислим наращенную сумму при реинвестировании в течение первого квартала:

$$S = 100\,(1 + 0{,}1 \cdot 31/365)\,(1 + 0{,}1 \cdot 28/365)\,(1 + 0{,}1 \cdot 31/365) = \\ = 102{,}486 \text{ тыс. руб.}$$

Определим наращенную сумму при отсутствии реинвестирования:

$$S = 100\,(1 + 0{,}1 \cdot 90/365) = 102{,}465 \text{ тыс. руб.}$$

Из результатов вычислений можно сделать вывод, что реинвестирование увеличивает наращенную сумму.

15.1.2. Дисконтирование и учет

На практике часто приходится решать задачу, обратную наращению процентов, когда по заданной сумме S, соответствующей окончанию финансовой операции, требуется найти исходную сумму P. Расчет P по S называют *дисконтированием* суммы S.

Величина P, найденная путем дисконтирования, называется *современной величиной*, или *текущей стоимостью*, суммы S.

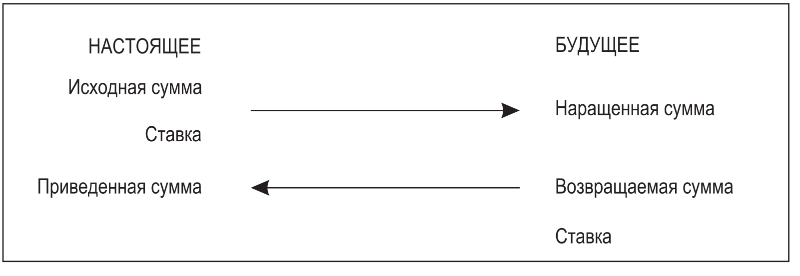
Проценты в виде разности

$$D = S - P$$

называют *дисконтом*, или *скидкой*. Дисконт, как скидка с конечной суммы долга, может определяться через процентную ставку или в виде абсолютной величины.

Процесс начисления и удержания процентов вперед называют *учетом*. В практике используется два принципа расчета процентов: путем наращения суммы ссуды и устанавливая скидку с конечной суммы долга.

В большинстве случаев фактор времени учитывается в финансовых контрактах именно с помощью дисконтирования. Величина P эквивалентна сумме S в том смысле, что через определенный период времени и при заданной ставке процентов она в результате наращения станет равной S. Поэтому операцию дисконтирования называют также *приведением*. *Приведение* — это определение любой стоимостной величины на некоторый момент времени. Если некоторая сумма приводится к более ранней дате, чем текущая, то применяется дисконтирование, если же речь идет о более поздней дате, то — наращение. Схематически наращение и дисконтирование можно представить следующим образом:



Имеется два вида дисконтирования: математическое дисконтирование и банковский (коммерческий) учет.

Математическое дисконтирование представляет собой решение задачи, обратной наращению первоначальной ссуды. Если в прямой задаче

$$S = P\,(1 + ni),$$

то в обратной

$$P = S/(1 + ni). \tag{15.8}$$

Выражение $1/(1 + ni)$ формулы (15.8) называют *дисконтным множителем*. Он показывает, какую долю составляет первоначальная сумма ссуды в окончательной величине долга.

Дисконт (D) суммы S равен

$$D = S - P. \tag{15.9}$$

Пример 6. Заемщик получил от банка кредит на 8 месяцев под 20% простых годовых с условием вернуть 500 тыс. руб. Какую сумму получил заемщик в момент заключения договора и чему равен дисконт.

Решение. По формуле (15.8) найдем сумму, которую получил заемщик в момент заключения договора:

$$P = S/(1 + ni) = 500/(1 + 0{,}2 \cdot 2/3) = 441{,}176 \text{ тыс. руб.}$$

Дисконт составит:

$$D = S - P = 500 \text{ тыс. руб.} - 441{,}176 \text{ тыс. руб.} = 58{,}824 \text{ тыс. руб.}$$

Ответ. Заемщик получил в момент заключения договора 441,176 тыс. руб., дисконт банка составит 58,824 тыс. руб.

Рассмотрим банковский (коммерческий) учет. Операция учета, в том числе учета векселей, заключается в том, что банк до наступления срока платежа по векселю или другому платежному обязательству покупает его у владельца (являющегося кредитором) по цене ниже той суммы, которая должна быть выплачена по нему в конце срока, т. е. приобретает (учитывает) его с дисконтом.

Для расчета процентов при учете векселей применяется *учетная ставка*, которую обозначим d.

Простая годовая учетная ставка находится

$$d = (S - P)/Sn. \tag{15.10}$$

Размер дисконта или учета, удерживаемого банком, равен

$$D = Snd, \tag{15.11}$$

поэтому

$$P = S - D = S - Snd = S\,(1 - nd). \tag{15.12}$$

Множитель $(1 - nd)$ называется *дисконтным множителем*. Срок n в выражении (15.2) измеряет период времени от момента учета векселя до даты его погашения в годах.

Дисконтирование по учетной ставке проводится в большинстве случаев при условии, что год равен 360 дням.

Пример 7. Владелец векселя на сумму 100 тыс. руб. с уплатой 17.11 учел его в банке 23.09 по учетной ставке 8% годовых. Определить сумму, полученную владельцем векселя, принять $K = 360$ дней.

Решение. До погашения векселя осталось 55 дней. Сумма, полученная владельцем векселя по формуле (15.12), составит:

$$P = S\,(1 - nd) = 100\,(1 - 0{,}08 \cdot 55/360) = 98{,}77778 \text{ тыс. руб.}$$

Ответ. Владелец векселя при учете его в банке получит 98,77778 тыс. руб.

Учетная ставка может использоваться для наращения, т. е. для расчета S по P. Из формулы (15.12) следует, что

$$S = P/(1 - nd). \tag{15.13}$$

Операции наращения и дисконтирования противоположны, но они могут использоваться для решения обеих задач.

В этом случае в зависимости от применяемой ставки можно различать прямую и обратную задачи (табл. 15.1).

Таблица 15.1. Прямая и обратная задачи

Ставка	Прямая задача	Обратная задача
Наращения i	Наращение: $S = P\,(1 + ni)$	Дисконтирование: $P = S/(1 + ni)$
Учетная d	Дисконтирование: $P = S\,(1 - nd)$	Наращение: $S = P/(1 - nd)$

Найдем зависимости процентной ставки i от учетной ставки d, и наоборот.

Из равенств выражений (15.8) и (15.13) имеем:

$$1 + ni = 1/(1 - nd),$$

откуда

$$i = d/(1 - nd), \tag{15.14}$$

$$d = i/(1 + ni). \tag{15.15}$$

В случае когда учету подлежит долговое обязательство, предусматривающее начисление простых процентов на первоначальную сумму долга, необходимо решить две задачи:

- определить конечную сумму долга на момент его погашения;
- рассчитать сумму, получаемую при учете, путем дисконтирования конечной суммы долга, применяя учетную ставку, действующую в момент учета.

Решение двух этих задач можно записать в виде одной формулы, содержащей наращение по ставке простых процентов, фигурирующей в долговом обязательстве, и дисконтирование по учетной ставке:

$$P_2 = P_1\,(1 + n_1 i)\,(1 - n_2 d), \tag{15.16}$$

где P_1 – первоначальная сумма ссуды;

P_2 — сумма, получаемая при учете обязательства;

n_1 — общий срок платежного обязательства, в течение которого начисляются проценты;

n_2 – срок от момента учета до погашения долга.

Пример 8. Платежное обязательство уплатить через 60 дней 200 тыс. руб. с процентами, начисляемыми по ставке простых процентов $i = 15\%$ годовых, было учтено за 10 дней до срока погашения по учетной ставке $d = 12\%$. Определить сумму, получаемую при учете.

Решение. По формуле (15.16) имеем:

$$P_2 = 200\,(1 + 0{,}15 \cdot 60/365)\,(1 - 0{,}12 \cdot 10/360) = 204{,}248 \text{ тыс. руб.}$$

Ответ. Владелец платежного обязательства получит при учете 204,248 тыс. руб.

Следует отметить, что в примере при наращении использовалась временная база, равная 365 дней, а при дисконтировании — 360.

Иногда ставится задача по нахождению временного интервала, за который исходная сумма при заданной ставке процентов вырастет до нужной величины, или определению срока, обеспечивающего определенный дисконт с заданной величиной.

При использовании простой ставки наращения i из выражения (15.1) находим

$$n = (S - P)/Pi, \tag{15.17}$$

где n — срок операции в годах.

При использовании учетной ставки d из (15.10) имеем

$$n = (S - P)/Sd, \tag{15.18}$$

где n — оставшийся срок от учета до погашения долга в годах.

Выражения (15.14) и (15.15) определяют временной срок, измеряемый в годах, а простые ставки в основном используются в краткосрочных операциях, когда срок исчисляется днями. В этом случае срок финансовой операции в днях вычисляется

$$t = nK, \tag{15.19}$$

где K — временная база.

Уровень процентной ставки является мерой доходности операции, критерием сопоставления альтернатив и выбора наиболее выгодных условий. Из формул (15.14), (15.15), (15.16) найдем ставку наращения i и учетную ставку d

$$i = (S - P)/Pn, \tag{15.20}$$

$$i = K\,(S - P)/Pt, \tag{15.21}$$

$$d = (S - P)/Sn, \tag{15.22}$$

$$d = K\,(S - P)/St. \tag{15.23}$$

Следует отметить, что срок n в этих формулах имеет разный смысл: в выражениях (15.20) и (15.21) это весь срок операции, а в (15.22) и (15.23) — срок, оставшийся до погашения.

Пример 9. Определить доходность операции для кредитора, если им предоставлена ссуда в размере 200 тыс. руб. на 60 дней и договор предусматривает сумму погашения долга 210 тыс. руб. Доходность выразить в виде простой ставки процентов i и учетной ставки d. Временную базу принять равной $K = 360$ дней.

Решение. По формуле (15.21) определим доходность операции в виде простой ставки процентов:

$$i = K(S - P)/Pt = 360\ (210 - 200)/200 \cdot 60 = 0{,}3.$$

По формуле (15.23) определим доходность операции в виде простой учетной ставки:

$$d = K(S - P)/St = 360\ (210 - 200)/210 \cdot 60 = 0{,}286.$$

Ответ. Доходность операции, выраженная в виде простой ставки, составляет 30%, а в виде простой учетной ставки — 28,6%.

15.2. Сложные проценты

Сложные проценты применяются в долгосрочных финансово-кредитных операциях, если проценты не выплачиваются периодически сразу после их начисления за прошедший интервал времени, а присоединяются к сумме долга. Присоединение начисленных процентов к сумме, которая служила базой для их определения, иногда называют *капитализацией* процентов.

15.2.1. Наращение процентов

Пусть первоначальная сумма долга равна P, тогда через один год сумма долга с присоединенными процентами составит $P(1 + i)$, через два года $P(1 + i)(1 + i) = P(1 + i)^2$, через n лет — $P(1 + i)^n$.

Таким образом, получаем формулу наращения для сложных процентов

$$S = P(1 + i)^n, \qquad (15.24)$$

где S — наращенная сумма;

i — годовая ставка сложных процентов;

n — срок ссуды;

$K_{\text{нар.}} = (1 + i)^n$ — множитель (коэффициент) наращения.

В практических расчетах в большинстве случаев применяют дискретные проценты, т. е. проценты, начисляемые за одинаковые интервалы времени (год, полугодие, квартал и т. д.).

Наращение по сложным процентам представляет собой рост по закону геометрической прогрессии, первый член которой равен P, а знаменатель $(1 + i)$.

Сравним коэффициенты наращения по простым и сложным процентам по ставке 20% годовых и временной базе 360 дней. Результаты расчета поместим в табл. 15.2.

Таблица 15.2

Коэффициент наращения	30 дней	180 дней	1 год	5 лет	10 лет
$1 + ni$	1,0167	1,1	1,2	2,0	3,0
$(1 + i)^n$	1,0153	1,0954	1,2	2,4883	6,1917

Отметим, что при сроке операции менее года наращение по простым процентам дает больший результат, чем по сложным, а при сроке более года — наоборот.

Графически изменения коэффициентов наращения по простым и сложным процентам представлены на рис. 15.2.

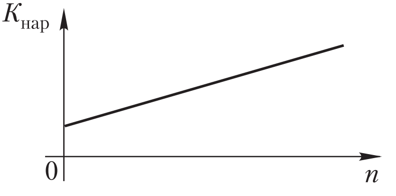


Рис. 15.2

В том случае, когда ставка сложных процентов меняется во времени, формула наращения имеет следующий вид:

$$S = P\,(1 + i_1)^{n_1}\,(1 + i_2)^{n_2} \ldots (1 + i_k)^{n_k}, \qquad (15.25)$$

где i_1, i_2, ... i_k — последовательные значения ставок процентов, действующих в периоды n_1, n_2,..., n_k соответственно.

Выражение $(1 + i_1)^{n1}\,(1 + i_2)^{n2} \ldots (1 + i_k)^{nk}$ — множитель (коэффициент) наращения.

Пример 10. В договоре зафиксирована переменная ставка сложных процентов, определяемая как 15% годовых плюс маржа 6% в первые два года, 8% в третий год, 10% в четвертый год. Определить величину множителя наращения за 4 года.

Решение. Найдем множитель наращения.

$$(1 + 0{,}21)^2\,(1 + 0{,}23)\,(1 + 0{,}25) = 2{,}25.$$

Ответ. Множитель наращения за 4 года составляет 2,25.

В целях оценки своих перспектив кредитору и должнику интересно знать, через сколько лет сумма ссуды возрастет в N раз при данной процентной ставке. Для этого приравняем множитель наращения величине N, в результате получим:

а) для простых процентов $(1+ ni_{\text{прост.}}) = N$, тогда

$$n = (N - 1)/i_{\text{прост.}}; \tag{15.26}$$

б) для сложных процентов $(1 + i_{\text{сложн.}})^n = N$, тогда

$$n = \ln N/\ln (1 + i_{\text{сложн.}}). \tag{15.27}$$

Для случая $N = 2$ формулы (15.26) и (15.27) называются *формулами удвоения* и принимают следующий вид:

а) для простых процентов

$$n = 1/i_{\text{прост.}}; \tag{15.28}$$

б) для сложных процентов

$$n = \ln 2/\ln (1 + i_{\text{сложн.}}). \tag{15.29}$$

В практических расчетах для быстрой оценки эффективности предлагаемой ставки наращения сложных процентов иногда пользуются приближенным расчетом при удвоении инвестиционной суммы, известным как «правило 72». Правило заключается в следующем: если i — процентная ставка, выраженная в процентах, то $72/i$ представляет число периодов, за которое приблизительно исходная сумма удвоится. Это правило дает хорошие результаты для небольших значений i. Так, если годовая ставка сложных процентов $i = 12\%$, то применение «правила 72» дает значение $n = 6$ лет, а по формуле (15.29) $n = 6{,}116$ лет, что вполне допустимо для ориентировочных расчетов.

Следует отметить, что в большинстве финансовых расчетов процентная ставка берется в десятичных дробях, а при расчете по «правилу 72» — принимается в процентах.

Существуют и другие правила, с помощью которых можно быстро рассчитать ориентировочный срок удвоения первоначального капитала. В литературе можно встретить «правило 70» ($n \approx 0{,}7/i$), «правило 71» ($n \approx 0{,}71/i$), «правило 69» ($n \approx 0{,}69/i$).

Пример 11. Рассчитать, за сколько лет долг увеличится вдвое при ставке простых и сложных процентов, равной 3% годовых. Для ставки сложных процентов расчеты выполнить по точной и приближенной формуле. Результаты сравнить.

Решение. Для случая простых процентов расчет проведем по формуле (15.28):

$$n = 1/i_{\text{прост.}} = 1/0{,}03 = 33{,}33 \text{ лет.}$$

Для сложных процентов по точной формуле (15.29):

$$n = \ln 2/\ln (1 + i_{\text{сложн.}}) = 0{,}6931 \ln (1 + 0{,}03) = 23{,}45 \text{ лет.}$$

Для сложных процентов по приближенной формуле:

$$n \approx 0{,}7/i \approx 0{,}7/0{,}03 \approx 23{,}33 \text{ лет.}$$

Ответ. Для случая простых процентов расчет по формуле (15.28) дает $n = 33{,}33$ лет, для сложных процентов и по точной формуле (15.29) $n = 23{,}45$ лет, для сложных процентов и по приближенной формуле $n \approx 23{,}33$ лет.

Таким образом, одинаковое значение ставок простых и сложных процентов приводит к различным результатам, при малых значениях ставки сложных процентов точная и приближенная формулы дают практически одинаковые результаты.

При дробном числе лет проценты начисляются разными способами.

1. По формуле сложных процентов

$$S = P(1 + i)^n.$$

2. На основе смешанного метода, согласно которому за целое число лет начисляются сложные проценты, а за дробное — простые

$$S = P(1 + i)^a (1 + bi), \tag{15.30}$$

где $n = a + b$;

a — целое число лет;

b — дробная часть года.

3. В ряде коммерческих банков применяется правило, в соответствии с которым за отрезки времени меньше периода начисления проценты не начисляются, т. е.

$$S = P(1 + i)^a. \tag{15.31}$$

Поскольку $b < 1$, где b — дробная часть, то $(1 + bi) > (1+ i)^b$, следовательно, наращенная сумма, вычисленная по формуле (15.30), будет больше суммы, вычисленной по формуле сложных процентов. Можно показать, что при малых i наибольшая величина разности при расчетах по этим формулам достигается при $b = 0{,}5$.

Пример 12. Банк предоставил ссуду в размере 100 тыс. руб. на 30 месяцев под 30% сложных годовых на условиях ежегодного начисления процентов. Какую сумму предстоит заемщику вернуть банку по истечении срока ссуды?

Расчет выполнить тремя способами. Провести анализ полученных результатов расчета.

Решение. Определим суммы, которые необходимо вернуть банку, тремя способами расчетов.

$$S_1 = 100\ (1 + 0{,}3)^{2{,}5} = 192{,}69 \text{ тыс. руб.},$$

$$S_2 = 100\ (1 + 0{,}3)^2\ (1 + 0{,}3 \cdot 0{,}5) = 194{,}35 \text{ тыс. руб.},$$

$$S_3 = 100\ (1 + 0{,}3)^2 = 169 \text{ тыс. руб.}$$

Ответ. При расчете 1-м способом заемщику предстоит вернуть банку 192,69 тыс. руб., при расчете 2-м способом на основе смешанного метода — 194, 35 тыс. руб., при расчете 3-м способом — 169 тыс. руб.

Вариант расчета при 3-м способе выгоден заемщику, вариант расчета при 2-м способе выгоден банку.

15.2.2. Номинальная ставка процентов

Пусть годовая ставка сложных процентов равна j, а число периодов начисления в году — m. Тогда каждый раз проценты начисляют по ставке j/m. Ставка j называется *номинальной*. Начисление процентов по номинальной ставке производится по формуле:

$$S = P\,(1 + j/m)^N, \tag{15.32}$$

где N — общее число периодов начисления.

Если срок ссуды измеряется дробным числом периодов начисления, то при m разовом начислении процентов в году наращенную сумму можно рассчитывать несколькими способами, приводящими к различным результатам.

Пример 13. В банк на депозитный счет вложены деньги в сумме 5 тыс. руб. сроком на два года с полугодовым начислением сложных процентов по ставке 20% годовых. Определить наращенную сумму и сравнить ее со случаем, если проценты начисляются ежеквартально.

Решение. Определим наращенную сумму при полугодовом начислении процентов по формуле (15.32):

$$S = P\,(1 + j/m)^N = 5\,(1 + 0{,}2/2)^4 = 7{,}3205 \text{ тыс. руб.}$$

Если начисление будет производиться ежеквартально, то сумма к концу двух лет составит:

$$S = 5\,(1 + 0{,}2/4)^8 = 7{,}387 \text{ тыс. руб.}$$

Ответ. Наращенная сумма при полугодовом начислении процентов к концу двух лет составит 7,3205 тыс. руб., а при ежеквартальном — 7,387 тыс. руб.

Кроме того, можно сделать следующие выводы:

- чем чаще в течение года происходит начисление по сложным процентам, тем больше наращенная сумма;
- при начислении сложных процентов 12% годовых неэквивалентно 1% в месяц;
- для простых процентов эти выводы недействительны. Одно из характерных свойств наращения по простым процентам заключается в том, что наращенная сумма не зависит от частоты начисления простых процентов. Например, наращение простыми процентами ежегодно по ставке 12% годовых дает тот же результат, что и ежемесячное наращение в течение года по ставке 1% в месяц;
- при наращении по сложным процентам ежемесячное начисление приносит больший результат, чем ежегодное один раз.

Пример 14. Размер ссуды 20 тыс. руб., она предоставлена на 28 месяцев. Номинальная ставка равна 20% сложных годовых. Начисление процентов ежеквартальное. Вычислить наращенную сумму в трех ситуациях:

- на дробную часть начисляются сложные проценты;
- на дробную часть начисляются простые проценты;
- дробная часть не учитывается.

Результаты расчетов сравнить.

Решение. Начисление процентов ежеквартальное. Всего имеется 28/3 кварталов.

Определим наращенную сумму, если на дробную часть начисляются сложные проценты:

$$S = 20\,(1 + 0{,}6/4)^{28/3} = 73{,}713 \text{ тыс. руб.}$$

Вычислим наращенную сумму, если на целую часть года начисляются сложные проценты, а на дробную часть начисляются простые проценты:

$$S = 20\,(1 + 0{,}6/4)^{9}\,(1 + 0{,}6/4 \cdot 1/3) = 73{,}875 \text{ тыс. руб.}$$

Найдем наращенную сумму, если дробная часть года не учитывается:

$$S = 20\,(1 + 0{,}6/4)^{9} = 70{,}358 \text{ тыс. руб.}$$

Ответ. Наращенные суммы в трех рассмотренных случаях составляют 73, 713 тыс. руб., 73,875 тыс. руб., 70,358 тыс. руб.

Из полученных результатов расчета следует, что наибольшего значения наращенная сумма достигает во втором случае, т. е. при начислении на дробную часть простых процентов, наименьшее значение — в третьем случае, когда наращение дробной части года не учитывается.

15.2.3. Эффективная ставка

Эффективная ставка показывает, какая годовая ставка сложных процентов дает тот же финансовый результат, что и m-разовое наращение в год по ставке j/m.

Если проценты начисляются по сложной ставке m раз в год, каждый раз со ставкой j/m, то можно записать равенство для множителей наращения:

$$(1 + i_э)^n = (1 + j/m)^{mn}, \tag{15.33}$$

где $i_э$ — эффективная ставка;

j — номинальная.

Из (15.33) получим выражение для определения эффективной ставки через номинальную:

$$i_э = (1 + j/m)^m - 1. \tag{15.34}$$

Обратная зависимость имеет вид:

$$j = m\,[1 + i_э)^{1/m} - 1]. \tag{15.35}$$

Пример 15. Предприниматель может получить ссуду:

- на условиях ежемесячного начисления процентов из расчета 26% годовых;
- на условиях полугодового начисления процентов из расчета 27% годовых.

Какой вариант расчета более выгоден предпринимателю?

Решение. Определим эффективную годовую ставку при ежемесячном и полугодовом начислении процентов:

$$i_э = (1 + j/m)^m - 1 = (1 + 0{,}26/12)^{12} - 1 = 1{,}2933 - 1 = 0{,}2933.$$

$$i_э = (1 + j/m)^m - 1 = (1 + 0{,}27/2)^2 - 1 = 1{,}2882 - 1 = 0{,}2882.$$

Ответ. Эффективная годовая ставка процентов при ежемесячном начислении составляет 29,33%, а при полугодовом — 28,82%. Второй вариант для предпринимателя является более предпочтительным.

Следует отметить, что эффективная ставка не зависит от величины кредита, а только от номинальной ставки и количества начислений.

Понимание роли эффективной процентной ставки важно для анализа финансовой деятельности предприятия. В рекламных проспектах обычно не говорится о природе процентной ставки, хотя в большинстве случаев речь идет о номинальной процентной ставке, которая существенно может отличаться от эффективной.

В США в практических расчетах применяют номинальную ставку, в европейских странах, как правило, — эффективную.

Пример 16. Определить, какой должна быть номинальная ставка при ежеквартальном начислении процентов, чтобы обеспечить эффективную ставку 12% годовых.

Решение.

$$j = m\,[(1 + i_э)^{1/m} - 1] = 4\,[(1 + 0{,}12\ )^{1/4} - 1] = 0{,}115.$$

Ответ. Номинальная ставка при ежеквартальном начислении процентов, чтобы обеспечить эффективную ставку 12% годовых, должна составлять 11,5%.

Пример 17. Рассчитать эффективную годовую процентную ставку при различной частоте начисления процентов, если номинальная составляет 10%.

Решение. Результаты расчета эффективной годовой процентной ставки при различной частоте начисления представлены в табл. 15.3.

Таблица 15.3

m	1	2	4	12	365
$i_э$	0,1	0,1025	0,10381	0,10471	0,10516

При $j = 0{,}1$, $i_э > 1$ при различных частотах начисления процентов.

Математически можно показать, что при $m > 1$ выполняется условие $i_э > j$.

В финансовых соглашениях не имеет значения, какую из процентных ставок указывать, так как использование как одной, так и другой дает одну и ту же наращенную сумму.

15.2.4. Учет по сложной ставке процентов

Как и в случае простых процентов рассмотрим два вида учета — математический и банковский.

Математический учет. В этом случае решается задача, обратная наращению по сложным процентам. Запишем исходную формулу для наращения $S = P(1+i)^n$, из нее найдем P:

$$P = S/(1+i)^n = Sv^n, \qquad (15.36)$$

где

$$v^n = 1/(1+\mathrm{i})^{-n} \qquad (15.37)$$

учетный, или *дисконтный*, *множитель*.

Если проценты начисляются m раз в году, то

$$P = S/(1+j/m)^{mn} = Sv^{mn}, \qquad (15.38)$$

где

$$v^{mn} = 1/(1+j/m)^{-mn} \qquad (15.39)$$

дисконтный множитель.

Величину P, полученную дисконтированием S, называют *современной*, или *текущей стоимостью*, или *приведенной величиной* S.

Суммы P и S эквивалентны в том смысле, что платеж в сумме S через n лет равноценен сумме P, выплачиваемой в настоящий момент. Разность $D = S - P$ называют *дисконтом*.

Банковский учет. В этом случае предполагается использование сложной учетной ставки. Дисконтирование по сложной учетной ставке осуществляется по формуле

$$P = S(1-d_{сл.})^n, \qquad (15.40)$$

где $d_{сл.}$ — *сложная годовая учетная ставка*.

Дисконт в этом случае определяется:

$$D = S - P = S - S\,(1 - d_{\text{сл.}}) = S\,[1 - (1 - d_{\text{сл.}})^n]. \qquad (15.41)$$

При использовании сложной учетной ставки процесс дисконтирования происходит с прогрессирующим замедлением, так как учетная ставка каждый раз применяется к сумме, уменьшенной за предыдущий период на величину дисконта.

В тех случаях, когда дисконтирование применяют m раз в году, используют *номинальную учетную ставку* f. Тогда в каждом периоде, равном $1/m$ части года, дисконтирование осуществляется по сложной учетной ставке f/m. Процесс дисконтирования по этой сложной учетной ставке m раз в году описывается формулой

$$P = S\,(1 - f/m)^N, \qquad (15.42)$$

где N — общее число периодов дисконтирования $(N = mn)$.

Дисконтирование не один, а m раз в году быстрее снижает величину дисконта.

Под *эффективной учетной ставкой* понимают сложную годовую учетную ставку, эквивалентную (по финансовым результатам) номинальной, применяемой при заданном числе дисконтирований в году m раз.

В соответствии с определением эффективной учетной ставки найдем ее связь с номинальной из равенства дисконтных множителей:

$$(1 - f/m)^{mn} = (1 - d_{\text{сл.}})^m,$$

из которого следует, что

$$d_{\text{сл.}} = 1 - (1 - f/m)^m. \qquad (15.43)$$

Отметим, что эффективная учетная ставка всегда меньше номинальной.

Наращение является обратной задачей для учетных ставок. Формулы наращения по сложным учетным ставкам можно получить из формул дисконтирования (15.40) и (15.42). После преобразования имеем

$$S = P/(1 - d_{\text{сл.}})^n, \qquad (15.44)$$

$$S = P/(1 - f/m)^N. \qquad (15.45)$$

Пример 18. На какую сумму следует выписать вексель, если реально выданная сумма равна 200 тыс. руб., срок погашения 2 года. Вексель рассчитывается, исходя из сложной годовой учетной ставки 10%.

Решение. По формуле (15.44) определим, на какую сумму должен быть выдан вексель

$$S = 200000/(1 - 0{,}1)^2 = 246{,}91358 \text{ тыс. руб.}$$

Ответ. Вексель должен быть выдан на сумму, равную 246,91358 тыс. руб.

Пример 19. Решить предыдущую задачу при условии, что наращение по сложной учетной ставке осуществляется поквартально.

Решение. По формуле (15.45) определим, какую сумму следует проставить в векселе

$$S = 200000/(1 - 0{,}1/4)^8 = 244{,}90242 \text{ тыс. руб.}$$

Ответ. В векселе следует проставить сумму 244,90242 тыс. руб.

15.3. Непрерывные проценты

Наращенная сумма при дискретных процентах, как было показано выше, определяется по формуле

$$S = P\,(1 + j/m)^{mn},$$

где j — номинальная ставка процентов;

m — число периодов начисления процентов в году.

Чем больше m, тем меньше промежутки времени между моментами начисления процентов. В пределе при $m \to \infty$ имеем

$$S = \lim_{m\to\infty} P\,(1 + j/m)^{mn} = P \lim_{m\to\infty} [(1 + j/m)^m]^n = Pe^{jm}.$$

Из курса математики, согласно «второму замечательному пределу», известно, что

$$\lim_{m\to\infty} (1 + 1/m)^m = \lim_{m\to\infty} [(1 + j/m)^{mj}]^j = e^j.$$

где e — основание натуральных логарифмов.

Таким образом, формула наращенной суммы в случае непрерывного начисления процентов по ставке j имеет вид

$$S = Pe^{jn}. \tag{15.46}$$

Для того чтобы отличать ставку непрерывных процентов от ставок дискретных процентов, ставку непрерывных процентов называют *силой роста* и обозначают δ.

$$S = Pe^{\delta n}. \tag{15.47}$$

Сила роста представляет собой номинальную ставку процентов при $m \to \infty$.

Дисконтирование на основе непрерывных процентных ставок осуществляется по формуле

$$P = Se^{-\delta n}. \tag{15.48}$$

Пример 20. На первоначальную сумму долга 10 тыс. руб. непрерывно начисляются проценты по силе роста 7,5% в течение 10 лет. Определить наращенную сумму.

Решение. По формуле (15.47) получим:

$$S = Pe^{\delta n} = 10 \cdot e^{0,75} = 21,17 \text{ тыс. руб.}$$

Ответ. Наращенная сумма составит 21,17 тыс. руб.

Дискретные и непрерывные процентные ставки находятся в функциональной зависимости, согласно которой можно осуществлять переход от непрерывных процентов к дискретным и наоборот.

Формулу эквивалентного перехода от одних ставок к другим можно получить, приравнивая соответствующие множители наращения:

$$(1 + i)^n = e^{\delta n}.$$

Из этого равенства следует, что

$$d = \ln (1 + i), \tag{15.49}$$

$$i = e^{\delta - 1}. \tag{15.50}$$

Пример 21. Годовая ставка сложных процентов равна 15%, чему равна эквивалентная сила роста?

Решение. Из формулы (15.49) следует:

$$\delta = \ln (1 + i) = \ln (1 + 0,15) = 0,1398.$$

Ответ. Годовой ставке 15% сложных эквивалентна сила роста, равная 13,98%.

В ряде практических задач начальная и конечная суммы заданы контрактом, требуется определить либо срок платежа, либо процентную ставку, которая в данном случае может служить мерой сравнения с рыночными показателями и характеристикой доходности операции для кредитора. Указанные величины можно найти из формул наращения или дисконтирования.

Рассмотрим задачу расчета срока ссуды и процентных ставок.

1. Из формулы наращения

$$S = P\,(1 + i)^n$$

следует, что

$$n = \log\,(S/P)/\log\,(1 + \mathrm{I}), \tag{15.51}$$

$$i = (S/P)^{1/n} - 1. \tag{15.52}$$

2. При наращивании по номинальной ставке процентов m раз в году из формулы

$$S = P\,(1 + j/m)^{mn}$$

получаем

$$n = \log\,(S/P)/\mathrm{m}\log\,(1 + j/m), \tag{15.53}$$

$$j = m\,[(S/P)^{1/(mn)} - 1]. \tag{15.54}$$

3. При дисконтировании по сложной годовой учетной ставке $d_{\text{сл.}}$. Из формулы

$$P = S\,(1 - d_{\text{сл.}})^n$$

имеем

$$n = \log\,(S/P)/\log\,(1 - d_{\text{сл.}}), \tag{15.55}$$

$$d_{\text{сл.}} = 1 - (P/S)^{1/n}. \tag{15.56}$$

4. При дисконтировании по номинальной учетной ставке m раз в году. Из выражения

$$P = S\,(1 - j/m)^{mn}$$

находим

$$n = \log\,(S/P)/m\log\,(1 - j/m), \tag{15.57}$$

$$f = m\,[1 - (P/S)^{1/mn}]. \tag{15.58}$$

5. При наращивании по постоянной силе роста. Исходя из

$$S = Pe^{\delta n},$$

получаем

$$n = \ln(S/P)/\delta, \quad (15.59)$$

$$\delta = \ln(S/P)\, n^{-1}. \quad (15.60)$$

Пример 22. Определить годовую процентную ставку начисляемых ежегодно процентов, если вложенная сумма денег удваивается через 8 лет.

Решение. По формуле (15.52) найдем годовую ставку процентов:

$$i = (S/P)^{1/n} - 1 = 2^{1/8} - 1 = 0{,}09.$$

Ответ. Годовая процентная ставка, по которой через 8 лет происходит удвоение вложенной суммы, составляет 9%.

15.4. Начисление процентов в условиях инфляции

Следствием *инфляции* является падение покупательной способности денег, которое за период n характеризуется индексом $J_{\text{пок.}}$. Известно, что *индекс покупательной способности* равен обратной величине *индекса цен (инфляции)* J_P:

$$J_{\text{пок.}} = 1/J_p. \quad (15.61)$$

Индекс цен (инфляции) показывает, во сколько раз выросли цены за указанный промежуток времени.

15.4.1. Инфляция и начисление по простым процентам

Если наращенная за n лет сумма денег составляет S, а *индекс цен* равен J_P, то реально наращенная сумма денег с учетом их покупательной способности составляет

$$C = S/J_P. \quad (15.62)$$

Пусть ожидаемый средний годовой *темп инфляции* (характеризующий прирост цен за год) равен h. Тогда *годовой индекс цен* составит $(1 + h)$.

Если наращение производится по простой ставке в течение n лет, то реальное наращение при темпе инфляции h составит

$$C = P(1 + hi)/J_P, \quad (15.63)$$

где в общем случае

$$J_p = \prod_{t=1}^{n}(1 + h_t) \qquad (15.64)$$

и при неизменном темпе прироста цен h

$$J_P = (1 + h)^n. \qquad (15.65)$$

Процентная ставка, которая при начислении простых процентов компенсирует инфляцию, равна

$$i = (J_P - 1)/n. \qquad (15.66)$$

Один из способов компенсации обесценения денег заключается в увеличении ставки процентов на величину так называемой *инфляционной премии*. Скорректированная таким образом ставка называется *брутто-ставкой*. Брутто-ставка, которую обозначим r, находится из равенства скорректированного на инфляцию множителя наращения по брутто-ставке множителю наращения по реальной ставке процента

$$(1 + nr)/J_P = (1 + ni), \qquad (15.67)$$

откуда находим

$$r = [(1 + ni)J_P - 1]/n. \qquad (15.68)$$

15.4.2. Инфляция и начисление по сложным процентам

Наращенная по сложным процентам сумма к концу срока ссуды с учетом падения покупательной способности денег (т. е. в неизменных рублях) составит

$$C = P(1 + i)^n/J_P, \qquad (15.69)$$

где индекс цен определяется выражением (15.64) или (15.65), в зависимости темпа инфляции.

Применяется два способа компенсации потерь от снижения покупательной способности денег при начислении сложных процентов.

1. Корректировка ставки процентов, по которой производится наращение, на величину инфляционной премии. Ставка процентов, увеличенная на величину инфляционной премии, называется брутто-ставкой (r). Считая, что годовой темп инфляции равен h, можем написать равенство соответствующих множителей наращения

$$(1 + r)/(1 + h) = 1 + i, \qquad (15.70)$$

где i — реальная ставка.

Отсюда находим

$$1 + r = (1 + h)\,(1 + i) = 1 + i + h + ih,$$

откуда

$$r = i + h + ih. \tag{15.71}$$

Инфляционная премия составляет величину $h + ih$.

2. Индексация первоначальной суммы P. В этом случае сумма P корректируется согласно движению заранее оговоренного индекса. Тогда получаем

$$S = PJ_p\,(1 + i)^n, \tag{15.72}$$

$$S = P\,(1 + h)^n\,(1 + i)^n. \tag{15.73}$$

Пример 23. Предполагается, что темп инфляции составит 20% в год. Какую ставку сложных процентов следует проставить в договоре, чтобы реальная доходность составляла 10%? Чему равна инфляционная премия?

Решение. Брутто-ставку вычислим по формуле (15.71):

$$r = i + h + ih = 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}1 \cdot 0{,}2 = 0{,}32.$$

Инфляционная премия составит:

$$h + ih = 0{,}2 + 0{,}1 \cdot 0{,}2 = 0{,}22.$$

Ответ. В договоре следует проставить ставку сложных процентов, равную 32% годовых, при этом инфляционная премия составит 22%.

Пример 24. Кредит в размере 500 тыс. руб. выдан на 2 года. Реальная доходность операции должна составлять 20% годовых по сложной ставке процентов. Ожидаемый уровень инфляции составляет 15% в год. Определить множитель наращения, учитывающий инфляцию и наращенную сумму.

Решение. Множитель наращения определяется по формуле:

$$J_p\,(1 + i)^n = (1 + h)^n\,(1 + i)^n = (1 + 0{,}15)^2\,(1 + 0{,}2)^2 = 1{,}9.$$

Наращенная сумма:

$$S = PJ_p\,(1 + i)^n = 500 \cdot 1{,}9 = 950 \text{ тыс. руб.}$$

Ответ. Множитель наращения, учитывающий инфляцию, составляет 1,9. Наращенная сумма — 950 тыс. руб.

15.4.3. Реальная ставка процентов

На практике приходится решать и обратную задачу — находить реальную ставку процента в условиях инфляции. Из тех же соотношений между множителями наращения найдем реальную ставку i по заданной (или объявленной) брутто-ставке r. Так как

$$(1 + nr)/J_P = 1 + ni,$$

то при начислении простых процентов годовая реальная ставка процентов составит

$$i = [(1 + nr)/J_P - 1]/n, \quad (15.74)$$

учитывая, что $J_P = (1 + h)^n$, получим:

$$i = \{[(1 + nr)/(1 + h)^n] - 1\}/n. \quad (15.75)$$

При начислении сложных процентов реальная ставка процентов определяется следующим выражением

$$i = [(1 + r)/(1 + h)] - 1 = (r - h)/(1 + h). \quad (15.76)$$

Пример 25. На годовой вклад помещены денежные средства по ставке 12% годовых. Инфляция составляет 10% в год. Найти реальную ставку процентов для случая простых и сложных процентов.

Решение. При начислении простых процентов годовая реальная ставка определяется по выражению (15.75):

$$i = \{[(1 + nr)/(1 + h)^n] - 1\}/n,$$

$$i = \{[(1 + 0{,}12)/(1 + 0{,}1)] - 1\} = 0{,}0182.$$

При начислении сложных процентов реальная ставка процентов определяется следующим выражением (15.76):

$$i = (r - h)/(1 + h).$$

$$i = (0{,}12 - 0{,}1)/(1 + 0{,}1) = 0{,}0182.$$

Ответ. Реальная ставка простых процентов составляет 1,82%, сложных 1,98%.

Глава 16

Потоки платежей

16.1. Основные понятия и определения

Часто в контрактах финансового характера предусматривают не отдельные разовые платежи, а серию платежей, распределенных во времени. Примерами могут быть регулярные выплаты с целью погашения долгосрочного кредита вместе с начисленными на него процентами, периодические взносы на специальный счет, на котором формируется некоторый фонд различного назначения (инвестиционный, пенсионный, страховой, резервный, накопительный и т. д.), дивиденды, выплачиваемые по ценным бумагам, выплаты пенсий из пенсионного фонда и др.

Определение 1. Ряд последовательных выплат и поступлений называют *потоком платежей*. Выплаты представляются отрицательными величинами, а поступления — положительными.

Обобщающими характеристиками потока платежей являются наращенная сумма и современная величина. Каждая из этих характеристик является числом.

Определение 2. *Наращенной суммой потока платежей* называется сумма всех членов последовательности платежей с начисленными на них процентами к концу срока ренты.

Под *современной величиной потока платежей* понимают сумму всех его членов, дисконтированных (приведенных) на некоторый момент времени, совпадающий с началом потока платежей или предшествующий ему.

Конкретный смысл этих обобщающих характеристик определяется природой потока платежей, причиной, его порождающей. Например, наращенная сумма может представлять собой итоговый размер формируемого инвестиционного или какого-либо другого фонда, общую сумму задолженности. Современная величина может характеризовать приведенную прибыль, приведенные издержки.

16.2. Финансовые ренты

Определение 3. *Поток платежей*, все члены которого положительные величины, а временные интервалы постоянны, называют *финансовой рентой* или *аннуитетом*.

Финансовая рента имеет следующие параметры: *член ренты* — величина каждого отдельного платежа; *период ренты* — временной интервал между двумя соседними платежами; *срок ренты* — время от начала финансовой ренты до конца ее последнего периода; *процентная ставка* — ставка, используемая при наращении или дисконтировании платежей, образующих ренту; число платежей в году; число начислений процентов в году; моменты платежа внутри периода ренты.

Классификация рент может быть произведена по различным признакам.

В зависимости от продолжительности периода, ренты делят на *годовые* и *p — срочные*, где p — число выплат в году.

По числу начислений процентов различают ренты с начислением один раз в году, m раз или непрерывно. Моменты начисления процентов могут не совпадать с моментами рентных платежей.

По величине членов различают *постоянные* (с равными членами) и *переменные ренты*. Если размеры платежей изменяются по какому-либо математическому закону, то часто появляется возможность вывести стандартные формулы, значительно упрощающие расчеты.

По вероятности выплаты членов различают *ренты верные* и *условные*. Верные ренты подлежат безусловной выплате, например, при погашении кредита. Выплата условной ренты ставится в зависимость от наступления некоторого случайного события. Поэтому число ее членов заранее неизвестно. Например, число выплат пенсий зависит от продолжительности жизни пенсионера.

По числу членов различают ренты с конечным числом членов, или ограниченные, и бесконечные, или вечные. В качестве вечной ренты можно рассматривать выплаты по облигационным займам с неограниченными или нефиксированными сроками.

В зависимости от наличия сдвига момента начала ренты по отношению к началу действия контракта или какому-либо другому моменту ренты подразделяются на *немедленные* и *отложенные* или *отсроченные*. Срок немедленных рент начинается сразу, а у отложенных запаздывает.

Ренты различают по моменту выплаты платежей. Если платежи осуществляются в конце каждого периода, то такие ренты называются *обычными*, или *постнумерандо*. Если же выплаты производятся в начале каждого периода, то ренты называются *пренумерандо*. Иногда предусматриваются платежи в середине каждого периода.

Анализ потоков платежей в большинстве случаев предполагает расчет наращенной суммы или современной величины ренты.

16.3. Формулы наращенной суммы

Рассмотрим наращение для различных случаев начисления рент.

1. Обычная годовая рента.

Пусть в конце каждого года в течение n лет на расчетный счет вносится по R рублей, проценты начисляются один раз в год по ставке i. В этом случае первый взнос к концу срока ренты возрастет до величины $R\,(1+i)^{n-1}$, так как на сумму R проценты начислялись в течение $(n-1)$ года. Второй взнос увеличится до $R\,(1+i)^{n-2}$ и т. д. На последний взнос проценты не начисляются.

Таким образом, в конце срока ренты ее наращенная сумма будет равна сумме членов геометрической прогрессии, записанной в обратном порядке

$$S = R + R\,(1+i) + R\,(1+i)^2 + \ldots + R\,(1+i)^{n-1},$$

в которой первый член равен R, знаменатель $(1+i)$, число членов n. Эта сумма равна

$$S = R\,\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)-1} = R\,\frac{(1+i)^n - 1}{i} = Rs_{n;\,i}, \qquad (16.1)$$

где

$$s_{n;\,i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i} \qquad (16.2)$$

называется *коэффициентом наращения ренты*. Он зависит только от срока ренты n и уровня процентной ставки i.

Наращенная сумма ренты пренумерандо в $(1 + i)$ раз больше постнумерандо и при $p = 1$

$$S_{\text{пр}} = S\,(1 + i) = Rs_{n;\,i}\,(1 + i) = R\,[(1 + i)^{n+1} - (1 + i)] =$$

$$= R\,(S_{n+1} - 1), \tag{16.3}$$

Пример 1. Для создания пенсионного фонда в банк ежегодно выплачивается рента постнумерандо в размере 10 млн руб. На поступающие платежи начисляются сложные проценты по годовой процентной ставке 0,18% годовых. Определить размер фонда через 6 лет.

Решение. По формуле (16.1) имеем:

$$S = \frac{10[(1 + 0{,}18)^6 - 1]}{0{,}18} = 94{,}42 \text{ млн руб.}$$

Ответ. Пенсионный фонд через 6 лет будет составлять 94,42 млн руб.

2. Годовая рента, начисление процентов m раз в году.

Пусть платежи делают один раз в конце года, а проценты начисляют m раз в году. Это означает, что применяется каждый раз ставка j/m, где j — номинальная ставка процентов. Тогда члены ренты с начисленными до конца срока процентами имеют вид

$$R\,(1 + j/m)^{m\,(n-1)},\ R\,(1 + j/m)^{m\,(n-2)},\ ...,\ R.$$

Если прочитать предыдущую строку справа налево, то получим геометрическую прогрессию, первый член которой R, знаменатель $(1 + j/m)^m$, число членов n. Сумма членов этой прогрессии будет наращенной суммой ренты. Она равна

$$S = R \cdot \frac{(1 + j/m)^{mn} - 1}{(1 + j/m)^m - 1}. \tag{16.4}$$

Наращенная сумма ренты пренумерандо вычисляется по формуле

$$S_{\text{пр.}} = S\,(1 + j/m)^m. \tag{16.5}$$

Пример 2. В условиях примера 1 принять, что проценты банком начисляются ежеквартально по номинальной ставке 18% годовых. Сделать вывод, какой вариант начисления процентов выгоден кредитору.

Решение. По формуле (16.5) имеем

$$S = 10\,\frac{(1 + 0{,}18/4)^{24} - 1}{(1 + 0{,}18/4)^4 - 1} = 97,\ 45 \text{ млн руб.}$$

Ответ. Кредитору выгоден вариант примера 2, чтобы на ренту начислялись проценты ежеквартально, при этом размер фонда будет составлять 97,45 млн. руб.

3. Рента p-срочная, $m = 1$.

Найдем наращенную сумму при условии, что рента выплачивается p раз в году равными платежами, а проценты начисляются один раз в конце года.

Если R — годовая сумма платежей, то размер отдельного платежа равен R/p. Тогда последовательность платежей с начисленными до конца срока процентами также представляет собой геометрическую прогрессию, записанную в обратном порядке

$$\frac{R}{p}(1+i)^{n-1/p},\quad \frac{R}{p}(1+i)^{n-2/p},\quad \frac{R}{p}(1+i)^{n-3/p},\quad \ldots,\quad \frac{R}{p},$$

у которой первый член R/p, знаменатель $(1+\ i)^{1/p}$, общее число членов np. Тогда наращенная сумма рассматриваемой ренты равна сумме членов этой геометрической прогрессии

$$S = \frac{R}{p}\,\frac{(1+i)^{(1/p)np}-1}{(1+i)^{1/p}-1} = R\,\frac{(1+i)^{n}-1}{p\left[(1+i)^{1/p}-1\right]} = Rs_{n;\,i}^{(p)} \tag{16.6}$$

где

$$s_{n;\,i}^{(p)} = \frac{(1+i)^{n}-1}{p\left[(1+i)^{1/p}-1\right]} \tag{16.7}$$

коэффициент наращения p-срочной ренты при $m = 1$.

Наращенная сумма ренты пренумерандо вычисляется по формуле:

$$S_{\text{пр}} = S\,(1+i)^{1/p}. \tag{16.8}$$

Пример 3. Господин А. Б. Иванов вносит в банк в конце каждого месяца на специальный счет по 500 руб. На поступающие суммы платежей начисляются сложные проценты по годовой процентной ставке 22%. Определить размер суммы, которая будет находиться на счете через 8 лет.

Решение. По формуле (16.6) найдем размер суммы:

$$S = 500\,[(1+0{,}22)^{8}-1]/[(1+0{,}22)^{1/12}-1] = 116{,}93 \text{ тыс. руб.}$$

Ответ. Размер суммы, которая будет находиться на счете господина А. Б. Иванова через 8 лет, составит 116,93 тыс. руб.

4. Рента p-срочная, $p = m$.

В контрактах часто начисление процентов и поступление платежа совпадают во времени. Таким образом, число платежей p в году и число начислений процентов m совпадают, при этом $p = m$. Тогда для получения формулы расчета наращенной суммы воспользуемся аналогией с годовой рентой и одноразовым начислением процентов в конце года, для которой

$$S = R\frac{(1+i)^n - 1}{i}.$$

Различие будет лишь в том, что все параметры теперь характеризуют ставку и платеж за период, а не за год. Таким образом, получаем

$$S = \frac{R}{m}\frac{\left(1 + j/m\right)^{mn} - 1}{j/m} = R\frac{\left(1 + j/m\right)^{mn} - 1}{j}, \qquad (16.9)$$

Наращенная сумма ренты пренумерандо вычисляется по формуле:

$$S_{\text{пр}} = S\,(1 + j/m). \qquad (16.10)$$

Пример 4. Господин В. Г. Петров должен отдать долг в размере 200 тыс. руб. Для того чтобы собрать эту сумму, он планирует в течение трех лет в конце каждого полугодия вносить в банк на специальный счет одну и ту же сумму при условии, что каждые полгода начисляются сложные проценты по годовой ставке 15%. Какова должна быть величина вносимых господином В. Г. Петровым полугодовых вкладов при полугодовом начислении процентов?

Рассмотреть случай, когда в банк вносится сумма один раз в конце каждого года и начисление процентов производится по той же сложной процентной ставке.

Решение. Из выражения (16.9) найдем сумму (R), которую необходимо вносить в банк каждые полгода и при полугодовом начислении сложных процентов процентов:

$$R = Sj/[\,(1 + j/m)^{mn} - 1] = 200 \cdot 0{,}15/[(1 + 0{,}15/2)^{2\cdot 3} - 1] =$$

$$= 55{,}228 \text{ тыс. руб.}$$

Из формулы (16.1) найдем сумму, которую необходимо вносить в банк каждый год и при годовом начислении сложных процентов:

$$R = S\,j/[(1 + j)^n - 1] = 200 \cdot 0{,}15/[(1 + 0{,}15)^3 - 1] = 57{,}692 \text{ тыс. руб.}$$

Ответ. Господину В. Г. Петрову необходимо вносить в банк каждые полгода при полугодовом начислении сложных процентов сумму, равную 55,228 тыс. руб. и сумму в 57,692 тыс. руб. при ежегодном вкладе и годовом начислении сложных процентов. Первый вариант вклада для него более выгоден.

5. Рента p-срочная, $p \geq 1$, $m \geq 1$.

Это самый общий случай p-срочной ренты с начислением процентов m раз в году, причем, возможно, $p \neq m$.

Первый член ренты R/p, уплаченный спустя $1/p$ года после начала, составит к концу срока вместе с начисленными на него процентами

$$\frac{R}{p}(1+j/m)^{m(n-1/p)} = \frac{R}{p}(1+j/m)^{mn-m/p}.$$

Второй член ренты к концу срока возрастет до

$$\frac{R}{p}(1+j/m)^{m(n-2/p)} = \frac{R}{p}(1+j/m)^{mn-2(m/p)}$$

и т. д. Последний член этой записанной в обратном порядке геометрической прогрессии равен R/p, ее знаменатель $(1+j/m)^{m/p}$, число членов np. В результате получаем наращенную сумму

$$S = \frac{R}{p}\frac{(1+j/m)^{(m/p)np}}{p(1+j/m)^{m/p}-1} = R\frac{(1+j/m)^{mn}-1}{p[(1+j/m)^{m/p}-1]}. \qquad (16.11)$$

Наращенная сумма ренты пренумерандо определяется по выражению:

$$S_{\text{пр}} = S(1+j/m)^{m/p}. \qquad (16.12)$$

Пример 5. Предприятие создает страховой фонд, для чего направляет в банк платежи в размере 100 тыс. руб. в конце каждых 4 месяцев, начисление процентов банк производит 1 раз в полгода по сложной годовой процентной ставке 15%. Определить размер страхового фонда через 10 лет.

Решение. По формуле (16.11) найдем:

$$S = \frac{100}{3}\frac{\left(1+0{,}15/2\right)^{2\cdot 10}-1}{\left(1+0{,}15/2\right)^{2/3}-1} = 2191{,}75584 \text{ тыс. руб.}$$

Ответ. Размер страхового фонда предприятия через 10 лет составит 2191,75584 тыс. руб.

16.4. Формулы современной величины

1. Обычная годовая рента.

Пусть член годовой ренты равен R, процентная ставка i, проценты начисляются один раз в конце года, срок ренты n. Тогда дисконтированная величина первого платежа равна

$$R = 1/(1+i) = Rv,$$

где $v = 1/(1+i)$ — дисконтный множитель.

Приведенная к началу ренты величина второго платежа равна Rv^2 и т. д. Таким образом, приведенные величины образуют геометрическую прогрессию:

$$Rv,\ Rv^2,\ Rv^3,\ ...,\ Rv^n,$$

сумма членов которой является современной величиной

$$A = Rv\frac{v^n - 1}{v - 1} = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = Ra_{n;\,i}, \qquad (16.13)$$

где

$$a_{n;\,i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}, \qquad (16.14)$$

$a_{n;\,i}$ — коэффициент приведения ренты.

Коэффициент приведения ренты зависит только от двух параметров: срока ренты n и процентной ставки i, ее значения имеются в таблицах. Современная величина ренты пренумерандо равна

$$A_{\text{пр}} = A\,(1+i). \qquad (16.15)$$

2. Рента p — срочная, $p \geq 1$, $m \geq 1$.

Аналогично можно получить формулу для расчета современной величины ренты в общем случае для произвольных значений p и m.

$$A = R\frac{1-(1+j/m)^{-mn}}{p\,[(1+j/m)^{m/p} - 1]}. \qquad (16.16)$$

Современная величина ренты пренумерандо

$$A_{\text{пр}} = A\,(1+j/m)^m. \qquad (16.17)$$

Пример 6. Владельцы химического завода предложили администрации города в качестве компенсации за ущерб, нанесенный окружающей среде, выплатить 500 тыс. долл. в течение 5 лет полугодовыми равными платежами. Найти современную величину вносимой ренты при ежеквартальном дисконтировании платежей сложными процентами по годовой процентной ставке 20%.

Решение. По формуле (16.16) найдем современную величину вносимой ренты:

$$A = 50\frac{1-\left(1+0{,}2/4\right)^{-4\cdot 5}}{\left(1+0{,}2/4\right)^{2/2}-1} = 623{,}1105 \text{ тыс. долл.}$$

Ответ. Современная величина вносимой ренты составит 623,1105 тыс. долл.

16.5. Зависимость между современной величиной и наращенной суммой ренты

Пусть A — современная величина годовой ренты постнумерандо, а S — ее наращенная стоимость к концу срока n, $p = 1$, $m = 1$.

Покажем, что наращение процентов на сумму A за n лет дает сумму, равную S:

$$A(1+i)^n = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}(1+i)^n = R\frac{(1+i)^n-1}{i} = S. \quad (16.18)$$

Отсюда следует, что дисконтирование S дает A:

$$Sv^n = A. \quad (16.19)$$

Коэффициент приведения (дисконтирования) и наращения ренты связаны соотношениями:

$$a_{n;\,i}\,(1+i)^n = s_{n;\,i}, \quad (16.20)$$

$$s_{n;\,i}\,v^n = a_{n;\,i}. \quad (16.21)$$

16.6. Определение параметров финансовой ренты

Иногда при подготовке контрактов возникает задача определения по заданной наращенной сумме ренты S или ее современной стоимости A остальных параметров ренты; R, n, i, p, m. Такие параметры, как m и p, обычно задаются по соглашению двух подписывающих сторон. Найдем параметры R, n, i.

16.6.1. Нахождение размера ежегодной суммы платежа

В зависимости от того, какая обобщающая характеристика постоянной ренты задана S или A, возможны два варианта расчета

$$R = S/s_{n;\,i} \tag{16.22}$$

или

$$R = A/a_{n;\,i}. \tag{16.23}$$

16.6.2. Определение срока постоянной ренты

Рассмотрим решение этой задачи на примере обычной годовой ренты с постоянными заданными платежами. Решая исходные формулы для S и A

$$S = R\,\frac{(1+i)^n - 1}{i},\quad A = R\,\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

относительно срока n, получаем, соответственно, следующие два выражения

$$n = \frac{\ln\left(\frac{S}{R}\,i + 1\right)}{\ln(1+i)} \tag{16.24}$$

и

$$n = \frac{-\ln\left(1 - \frac{A}{R}\,i\right)}{\ln(1+i)}. \tag{16.25}$$

Последнее выражение (16.25) имеет смысл только при $R > Ai$.

16.6.3. Нахождение ставки процентов

Для того чтобы найти ставку i, необходимо решить одно из нелинейных уравнений (предполагаем, что речь идет о постоянной годовой ренте постнумерандо) следующего вида

$$S = R\,\frac{(1+i)^n - 1}{i} \text{ или } A = R\,\frac{1-(1+i)^{-n}}{i},$$

которые эквивалентны двум другим

$$s_{n;\,i} = \frac{S}{R} = \frac{(1+i)^n - 1}{i} \text{ или } a_{n;\,i} = \frac{A}{R}\,\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}. \tag{16.26}$$

В этих уравнениях неизвестным является процентная ставка i. Решение нелинейных уравнений может быть найдено лишь приближенно. Известно несколько методов решения таких уравнений: метод линейной интерполяции, метод Ньютона–Рафсона и др. Рассмотрим метод линейной интерполяции.

Найдем с помощью прикидочных расчетов нижнюю ($i_н$) и верхнюю ($i_в$) оценки ставки. Это осуществляется путем подстановки в одну из формул (16.26) различных произвольных значений i и сравнения найденного значения $s_{n;\,i}$ или $a_{n;\,i}$ с правой частью выражения (16.26). Далее корректировка нижнего значения ставки производится по следующей интерполяционной формуле:

$$i = i_н + \frac{s - s_н}{s_в - s_н}(i_в - i_н), \qquad (16.27)$$

в которой $s_н$ и $s_в$ — значения коэффициента наращения (или коэффициента приведения) ренты для процентных ставок $i_н$ и $i_в$ соответственно.

Полученное значение ставки проверяют, подставляя его в левую часть исходного уравнения и сравнивая результат с правой частью. Если достигнутая точность недостаточна, повторно применяют формулу (16.27), заменив в ней значение одной из приближенных оценок ставки на более точное, найденное на предыдущей итерации, и соответствующее ей значение множителя наращения (или приведения). Рассмотрим методику нахождения процентной ставки на конкретном примере.

Пример 7. Для создания фонда на замену оборудования фирме за 10 лет необходимо накопить 2 млн руб. Ежегодно она может вносить в банк для этой цели 100 тыс. руб. При какой ставке сложных процентов, предложенной банком, фирма может заключить договор и накопить нужную сумму к установленному сроку?

Решение. Согласно формуле (16.26)

$$s_{n;\,i} = [(1 + i)^n - 1]/i = S/R = 2000000/100000 = 20.$$

Определим $s_{n;\,i}$ для нескольких произвольных значений процентных ставок.

Так, для $i = 0{,}14$

$$s_{10;\,0{,}14} = [(1 + i)^n - 1]/i = [(1 + 0{,}14)^{10} - 1]/0{,}14 = 19{,}26.$$

Для $i = 0{,}15$

$$s_{10;\,0,15} = [(1 + i)^n - 1]/i = [(1 + 0,15)^{10} - 1]/0,15 = 20,33.$$

Так как 19,26 < 20 < 20,33, то действительное значение процентной ставки лежит в интервале $0,14 < i < 0,15$.

Воспользуемся формулой (16.27) и найдем действительное значение процентной ставки:

$$i = 0,14 + (20 - 19,26)\ (0,15 - 0,14)/(20,33 - 19,26) = 0,1469.$$

Проверим правильность нахождения действительной процентной ставки:

$$[(1 + i)^n - 1]/i = [(1 + 0,1469)^{10} - 1]/0,1469 = 20,0.$$

Ответ. Процентная ставка должна составлять $i = 14,69\%$.

Глава 17

Применение математических моделей в финансовых вычислениях

17.1. Конверсия валюты и начисление процентов

Рассмотрим совмещение конверсии (обмена) валюты и наращение простых процентов, сравним результаты от непосредственного размещения имеющихся денежных средств в депозиты или после предварительного обмена на другую валюту. При этом возможны следующие варианты наращения процентов.

1. Без конверсии, когда валютные средства размещаются в качестве валютного депозита, наращение первоначальной суммы производится по валютной ставке путем применения формулы простых процентов.
2. С конверсией, при этом валютные средства конвертируются в рубли, наращение идет по рублевой ставке, в конце операции рублевая сумма конвертируется обратно в исходную валюту.
3. Без конверсии, в этом случае рублевая сумма размещается в виде рублевого депозита, на который начисляются проценты по рублевой ставке по формуле простых процентов.
4. С конверсией, когда рублевая сумма конвертируется в какую-либо конкретную валюту и инвестируется в валютный депозит. Проценты начисляются по валютной ставке. Наращенная сумма в конце операции вновь конвертируется в рубли.

Операции без конверсии не представляют сложности. В операции наращения с двойной конверсией имеются два источника дохода: начисление процента и изменение обменного курса. Причем начисление процента является безусловным источником (ставка фиксирована, инфляцию не рассматриваем). Изменение обменного курса может быть как источником дополнительного дохода, так и приводить к потерям. Остановимся на двух вариантах, предусматривающих двойную конверсию.

Введем обозначения:

P_v — сумма депозита в валюте;

P_r — сумма депозита в рублях;

S_v — наращенная сумма в валюте;

S_r — наращенная сумма в рублях;

K_0 — курс обмена в начале операции (курс валюты в руб.);

K_1 – курс обмена в конце операции;

n — срок депозита;

i — ставка наращения для рублевых сумм (в виде десятичной дроби);

j — ставка наращения для конкретной валюты.

17.1.1. Вариант конверсии «валюта => рубли => рубли => валюта» (простые проценты)

Рассмотрим вариант:

валюта => рубли => рубли => валюта.

Операция состоит из трех этапов: обмена валюты на рубли, наращения рублевой суммы, обратного конвертирования рублевой суммы в исходную валюту. Наращенная сумма, получаемая в конце операции в валюте, составит

$$S_v = P_v K_0 \, (1 + ni)/K_1. \qquad (17.1)$$

Как видим, три этапа операции нашли свое отражение в этой формуле в виде трех сомножителей.

Множитель наращения с учетом двойного конвертирования равен

$$m = \frac{K_0}{K_1}(1 + ni) = \frac{1 + ni}{(K_1/K_0)} = \frac{1 + ni}{K}\,. \qquad (17.2)$$

где $k = K_1/K_0$ — темп роста обменного курса за срок операции.

Из (17.2) следует, что множитель наращения m связан линейной зависимостью со ставкой i и обратной с обменным курсом в конце операции K_1 (или с темпом роста обменного курса k).

Исследуем зависимость общей доходности операции с двойной конверсией от соотношения конечного и начального курсов обмена k.

Простая годовая ставка процентов, характеризующая доходность операции, равна

$$i_{эфф.} = \frac{S_V - P_V}{P_V n}.$$

Подставим в эту формулу выражение для S_v

$$i_{эфф.} = \frac{K_0/K_1(1+ni)-1}{n} = \frac{1}{K}\frac{(1+ni)}{n} - \frac{1}{n}. \quad (17.3)$$

Из (17.3) следует, что с увеличением k доходность $i_{эфф.}$ падает по гиперболе с асимптотой $1/n$. При $k = 1$ доходность операции равна рублевой ставке, т. е. $i_{эфф.} = i$. При $k > 1$ $i_{эфф.} < i$, а при $k < 1$ $i_{эфф.} > i$. При некотором критическом значении k, которое обозначим k^*, доходность операции равна нулю. Из равенства $i_{эфф.} = 0$ находим

$$k^* = 1 + ni, \quad (17.4)$$

что означает

$$K_1^* = K_0(1+ni). \quad (17.5)$$

Таким образом, если ожидаемые величины k или K_1^* превышают свои критические значения, то операция убыточна ($i_{эфф.} < 0$).

Определим максимально допустимое значение курса обмена в конце операции K_1, при котором эффективность будет равна существующей ставке по депозитам в валюте, и применение двойного конвертирования не дает никакой дополнительной выгоды. Для этого приравняем множители наращения для двух альтернативных операций

$$1 + nj = (1 + ni)K_0/K_1.$$

Из равенства следует, что

$$\max K_1 = K_0 (1 + ni)/(1 + nj) \quad (17.6)$$

или

$$\max k = K_1/K_0 = (1 + ni)/(1 + nj). \quad (17.7)$$

Таким образом, депозит валюты через конверсию в рубли выгоднее валютного депозита, если обменный курс в конце операции ожидается меньше $\max K_1$.

17.1.2. Вариант конверсии «рубли => валюта => валюта => рубли» (простые проценты)

Рассмотрим вариант:

рубли => валюта => валюта => рубли.

Это операция с двойной конверсией, когда исходная и конечная суммы выражены в рублях. В этом случае трем этапам операции соответствуют три сомножителя для наращенной суммы

$$S_r = \frac{P_r}{K_0}(1+nj)K_1 = P_r(1+nj)\frac{K_1}{K_0}. \qquad (17.8)$$

Проведем анализ эффективности этой операции и определим критические точки.

Доходность операции в целом определяется по формуле

$$i_{\text{эфф.}} = \frac{S_r - P_r}{P_r n}.$$

Отсюда, подставив выражение для S_r, получим

$$i_{\text{эфф.}} = \frac{\frac{K_1}{K_0}(1+nj)-1}{n} = \frac{K(1+nj)-1}{n}. \qquad (17.9)$$

Зависимость показателя эффективности $i_{\text{эфф.}}$ от k линейная, при $k=1$ $i_{\text{эфф.}}=j$, при $k>1$ $i_{\text{эфф.}}>j$, при $k<1$ $i_{\text{эфф.}}<j$.

Найдем критическое значение k^*, при которых $i_{\text{эфф.}}=0$:

$$k^* = 1/(1+nj) \text{ или } K_1^* = K_0/(1+nj). \qquad (17.10)$$

Таким образом, если ожидаемые величины k или K_1 меньше своих критических значений, то операция убыточна ($i_{\text{эфф.}} < 0$).

Минимально допустимая величина k (темпа роста валютного курса за весь срок операции), обеспечивающая такую же доходность, что и прямой вклад в рублях, определяется путем приравнивания множителей наращения для альтернативных операций (или из равенства $i_{\text{эфф.}}=i$).

$$K_1(1+nj)/K_0 = 1+ni,$$

откуда

$$\min k = (1 + ni)/(1 + nj) \text{ или } \min K_1 = K_0\,(1 + ni)/(1 + nj). \qquad (7.11)$$

Таким образом, депозит рублевых сумм через конверсию в валюту выгоднее рублевого депозита, если обменный курс в конце операции ожидается больше $\min K_1$.

17.1.3. Вариант конверсии «валюта => рубли => рубли => валюта» (сложные проценты)

Рассмотрим вариант совмещения конверсии валюты и наращение сложных процентов:

валюта => рубли => рубли => валюта.

Три этапа операции запишем в одной формуле для наращенной суммы

$$S_v = P_v K_0\,(1 + i)^n/K_1, \qquad (17.12)$$

где i — ставка сложных процентов.

Множитель наращения

$$m = (1 + i)^n K_0/K_1 = (1 + i)^n/k, \qquad (17.13)$$

где $k = K_1\ /K_0$ — темп роста валютного курса за период операции.

Определим доходность операции в виде годовой ставки сложных процентов $i_э$. Из формулы наращения по сложным процентам

$$S = P\,(1 + i)^n$$

находим

$$i_э = \sqrt[n]{\frac{S_V}{P_V}} - 1.$$

Подставив в эту формулу значение S_v, получим

$$i_э = \sqrt[n]{\frac{P_V\,(1+i)^n\,K_0\ /\ K_1}{P_V}} - 1 = \frac{1+i}{\sqrt[n]{k}} - 1. \qquad (17.14)$$

Из этого выражения следует, что с увеличением темпа роста k эффективность $i_э$ падает.

Анализ показывает, что при $k = 1$ $i_э = i$, при $k > 1$ $i_э < i$, а при $k < 1$ $i_э > i$. Критическое значение k, при котором эффективность операции равна нулю, определяется

$$k^* = (1 + i)^n, \tag{17.15}$$

что означает равенство среднегодового темпа роста курса валюты годовому темпу наращения по рублевой ставке.

Таким образом, если ожидаемые величины k или K_1 больше своих критических значений, то рассматриваемая операция с двойной конверсией убыточна ($i_э < 0$).

Максимально допустимое значение k, при котором доходность операции будет равна доходности при прямом инвестировании валютных средств по ставке j, находится из равенства соответствующих множителей наращения:

$$(1 + j)^n = (1 + i)^n / k_{\max},$$

откуда

$$k_{\max} = (1 + i)^n / (1 + j)^n, \ \max K_1 = K_0 \, (1 + i)^n / (1 + j)^n. \tag{17.16}$$

Таким образом, депозит валюты через конверсию в рубли выгоднее валютного депозита, если обменный курс в конце операции ожидается меньше $\max K_1$.

Пример 1. Имеется сумма в долларах, которую предполагается разместить на полугодовой депозит. Обменный курс в начале операции 34 руб. за доллар, в конце операции предполагается 35 руб. Годовая ставка простых процентов по рублевым депозитам 12%, по валютным 5%.

Как выгоднее разместить вклад, как валютный или через конверсию в рублях?

Решение. При двойной конверсии: доллар $\Rightarrow$ рубли $\Rightarrow$ рубли $\Rightarrow$ доллар расчет производим по формуле (17.3) с учетом того, что $k = K_1 / K_0$,

где k — темп роста обменного курса за срок операции;

K_0 — курс обмена в начале операции;

K_1 — курс обмена в конце операции.

$$k = K_1 / K_0 = 35/34 = 1{,}029.$$

$$i_э = [(1 + 0{,}5 \cdot 0{,}12)/(1{,}029 \cdot 0{,}5)] - 1/0{,}5 = 0{,}06.$$

Ответ. По условию задачи доходность валютного депозита 5%, доходность операции с двойной конверсией 6%. Следовательно, выгоднее разместить вклад рублевый.

Пример 2. Имеется сумма в рублях, которую предполагается разместить на полугодовой депозит. Обменный курс в начале операции 34 руб. за доллар, ожидается в конце операции 35 руб. Годовая ставка простых процентов 12%, по валютному вкладу 5%.

Как выгоднее разместить вклад?

Решение. Темп роста обменного курса за срок операции

$$k = K_1/K_0 = 35/34 = 1{,}029.$$

По формуле (17.9) имеем:

$$i_э = [1{,}029\,(1 + 0{,}5 \cdot 0{,}05) - 1]/0{,}5 = 0{,}109.$$

Ответ. Вклад выгоднее разместить как рублевый депозит.

17.2. Погашение задолженности частями

17.2.1. Контур финансовой операции

Контур финансовой операции это графическое изображение процесса погашения краткосрочной задолженности частичными (промежуточными) платежами. Финансовая или кредитная операции предполагают сбалансированность вложений и отдачи.

Пусть в банк положена сумма в размере D_0 на срок t. На протяжении этого срока в момент времени t_1 сумма возрастает до величины D_1. В момент t_1 снимается сумма R_1 и уменьшается до величины $K_1 = D_1 - R_1$ и т. д. Заканчивается операция получением с вклада остатка суммы R_3. В этот момент задолженность банка полностью погашается.

График, представленный на рис. 17.1, *называют контуром финансовой операции*. Сбалансированная операция обязательно имеет замкнутый контур, т. е. последняя выплата полностью покрывает остаток за-

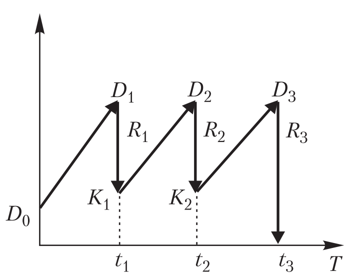


Рис. 17.1

долженности. Контур операции обычно применяется при погашении задолженности частичными промежуточными платежами.

С помощью последовательных частичных платежей иногда погашаются краткосрочные обязательства. В этом случае существует два метода расчета процентов и определения остатка задолженности. Это актуарный метод, он применяется в операциях со сроком более года. Другой метод назван правилом торговца. Он обычно применяется коммерческими фирмами в сделках со сроком не более года.

Следует отметить, что при начислении процентов, как правило, используются обыкновенные проценты с приближенным числом дней временных периодов.

17.2.2. Актуарный метод

Актуарный метод предполагает последовательное начисление процентов на фактические суммы долга. Частичный платеж идет в первую очередь на погашение процентов, начисленных на дату платежа. Если величина платежа превышает сумму начисленных процентов, то разница идет на погашение основной суммы долга. Непогашенный остаток долга служит базой для начисления процентов за следующий период и т. д. Если же частичный платеж меньше начисленных процентов, то никакие зачеты в сумме долга не делаются. Такое поступление приплюсовывается к следующему платежу.

Для случая, показанного на рис. 17.1, получим следующие расчетные формулы для определения остатка вклада:

$$K_1 = D_0\,(1 + t_1 i) - R_1;\; K_2 = K_1\,(1 + t_2 i) - R_2;$$
$$K_2\,(1 + t_3 i) - R_3 = 0, \qquad (17.17)$$

где t_1, t_2, t_3 — периоды времени, заданные в годах;

i — годовая процентная ставка.

17.2.3. Правило торговца

Правило торговца является другим подходом к расчету частичных платежей. Здесь возможны две ситуации.

1. Если срок ссуды не превышает года, сумма долга с начисленными за весь срок процентами остается неизменной до полного погашения.

Одновременно идет накопление частичных платежей с начисленными на них до конца срока процентами.

2. В случае когда срок превышает год, указанные выше расчеты делаются для годового периода задолженности. В конце года из суммы за-

долженности вычитается наращенная сумма накопленных частичных платежей. Остаток погашается в следующем году.

При общем сроке ссуды t можно записать следующее выражение:

$$S = D - K = D_0 (1 + ti) - \sum_{j=1}^{m} R_j (1 + t_j i), \qquad (17.18)$$

где S — остаток долга на конец срока;

D — наращенная сумма долга;

K — наращенная сумма платежей;

R_j — сумма частичного платежа;

t_j — интервал времени от момента платежа до конца срока;

m — число частичных (промежуточных) платежей.

Пример 3. Ссуда в размере 3000 тыс. руб. выдана банком 20 января на срок 1 год. На протяжении этого срока в счет погашения задолженности производятся платежи в банк. 20 апреля в размере 500 тыс. руб., 20 июля в сумме 200 тыс. руб., 20 октября в размере 800 тыс. руб. На ссуду банк предусматривает начисление простых процентов по ставке 30% годовых.

Рассчитать контур финансовой операции для актуарного метода и метода торговца и определить размер погасительного платежа в обоих случаях. Результаты расчета сравнить.

Решение. Вычислим размер погасительного платежа актуарным методом.

20 января долг банку составил 3000 тыс. руб.

20 апреля долг с процентами составил 3225 тыс. руб.:

$$3000\,(1 + 0{,}3 \cdot 1/4) = 3000 \text{ тыс. руб.} + 225 \text{ тыс. руб.} = 3225 \text{ тыс. руб.}$$

20 апреля в банк поступило 500 тыс. руб. > 225 тыс. руб., поэтому вычитаем из долга 500 тыс. руб.

на 20 апреля остаток дога составил 2725 тыс. руб.:

$$3225 \text{ тыс. руб.} - 500 \text{ тыс. руб.} = 2725 \text{ тыс. руб.}$$

на 20 июля долг с процентами составит 2929,375 тыс. руб.:

$$2725\,(1 + 0{,}3 \cdot 1/4) = 2725 \text{ тыс. руб.} + 24{,}375 \text{ тыс. руб.} = 2929{,}375 \text{ тыс. руб.}$$

20 июля в банк поступило 200 тыс. руб. < 204,375 тыс. руб., поэтому этот платеж присоединяем к платежу 20 октября.

20 октября долг с процентами составит 3133,750 тыс. руб.:

$$2725\,(1 + 0{,}3 \cdot 1/2) = 2725 \text{ тыс. руб.} + 408{,}750 \text{ тыс. руб.} = 3133{,}750 \text{ тыс. руб.}$$

20 октября в банк поступило 800 тыс. руб. > 408,750 тыс. руб., поэтому вычитаем из долга 800 тыс. руб.

на 20 октября остаток долга:

$$3133{,}750 \text{ тыс. руб.} - 200 \text{ тыс. руб.} - 800 \text{ тыс. руб.} = 2133{,}750 \text{ тыс. руб.}$$

20 января долг с процентами составит 2293,78125 тыс. руб.:

$$2133{,}750\,(1 + 0{,}3 \cdot 1/4) = 2293{,}78125 \text{ тыс. руб.}$$

Размер погасительного платежа составит 2293,78125 тыс. руб.

Вычислим размер погасительного платежа методом торговца.

На конец срока (1 год) остаток долга составит:

$$3000\,(1 + 0{,}3) - 500\,(1 + 0{,}3 \cdot 1/4) - 200\,(1 + 0{,}3 \cdot 1/2) - \\ - 800\,(1 + 0{,}3 \cdot 1/4) = 3900 \text{ тыс. руб.} - 612{,}5 \text{ тыс. руб.} - 230 \text{ тыс. руб.} - \\ - 860 \text{ тыс. руб.} = 2197{,}5 \text{ тыс. руб.}$$

Ответ. Размер погасительного платежа, вычисленный актуарным методом, составит 2293,78125 тыс. руб., методом торговца — 2197,5 тыс. руб.

Для банка выгоден расчет по актуарному методу, для клиента — по методу торговца.

17.2.4. Переменная сумма счета и расчет процентов

Рассмотрим ситуацию, когда в банке открыт сберегательный счет, который изменяется в течение срока хранения: денежные средства снимаются, делаются дополнительные взносы. Тогда в банковской практике при расчете процентов часто используют методику расчета с вычислением так называемых *процентных чисел*. Каждый раз, когда сумма на счете изменяется, вычисляется процентное число C_j за прошедший период j, в течение которого сумма на счете оставалась неизменной, по формуле

$$C_j = P_j\, t_j / 100, \tag{17.19}$$

где t_j — длительность j периода в днях.

Для определения суммы процентов, начисленной за весь срок, все процентные числа складываются и их сумма делится на постоянный делитель D:

$$D = K/i, \qquad (17.20)$$

где K — временная база (число дней в году, т. е. 360, 365 или 366);

i — годовая ставка простых процентов (%).

При закрытии счета владелец получит сумму равную последнему значению суммы на счете плюс сумму процентов.

Пример 4. Вкладчиком 20 января в банке был открыт счет в размере $P_1 = 1$ тыс. руб., процентная ставка по вкладу составляла $i = 15\%$ годовых. Дополнительный взнос на счет составил $R_1 = 2000$ руб. и был сделан 10 марта. Снятие со счета в размере $R_2 = 1500$ руб. зафиксировано 3 мая. 10 октября того же года счет был закрыт.

Определить сумму процентов и общую сумму, полученную вкладчиком при закрытии счета. При расчетах принять схему простых процентов с приближенным числом дней ссуды (360/360).

Решение. В задаче имеется три периода, в течение которых сумма на счете оставалась неизменной:

с 20 января по 10 марта ($P_1 = 1$ тыс. руб.; $t_1 = 10$ дн. + 30 дн. + 10 дн. = = 50 дн.);

с 10 марта по 3 мая ($t_2 = 20$ дн. + 30 дн. + 3 дн. = 53 дн.; $P_2 = P_1 + R_1 =$ = 1 тыс. руб. + 2 тыс. руб. = 3 тыс. руб.);

с 3 мая по 10 октября ($P_3 = P_2 + R_2 = 3$ тыс. руб. – 1,5 тыс. руб. = 1,5 тыс. руб., $t_3 = 26$ дн. + 4 · 30 дн. + 10 дн. = 156 дн.).

Найдем процентные числа:

$$C_1 = P_1 \cdot t_1/100 = 1000 \cdot 50/100 = 500;$$

$$C_2 = P_2 \cdot t_2/100 = 3000 \cdot 53/100 = 1590;$$

$$C_3 = P_3 \cdot t_3/100 = 1500 \cdot 156/100 = 2340.$$

Постоянный делитель

$$D = K/i = 360/15 = 24.$$

Сумма процентов

$$I = (C_1 + C_2 + C_3)/D = (500 + 1590 + 2340)/24 =$$
$$= (C_1 + C_3 + C_3)/D = 184{,}58 \text{ руб.}$$

Сумма, выплачиваемая при закрытии счета составит

$$P_3 + I = 1500 \text{ р.} + 184{,}58 \text{ р.} = 1684{,}58 \text{ руб.}$$

Ответ. Сумма процентных денег составит 184,58 руб., сумма, полученная вкладчиком при закрытии счета — 1684,58 руб.

17.3. Изменение условий контракта

В практике часто возникает необходимость в изменении условий контракта: например, должник может попросить об отсрочке срока погашения долга или, напротив, изъявить желание погасить его досрочно, в ряде случаев может возникнуть потребность объединить (консолидировать) несколько долговых обязательств в одно и т. д. Во всех этих случаях применяется принцип финансовой эквивалентности старых (заменяемых) и новых (заменяющих) обязательств. Для решения задач по изменению условий контракта разрабатывается так называемое *уравнение эквивалентности*, в котором сумма заменяемых платежей, приведенных к какому-либо одному моменту времени, приравнивается сумме платежей по новому обязательству, приведенных к той же дате. Для краткосрочных контрактов применяются простые процентные ставки, а для средне- и долгосрочных — сложные ставки.

Если в контрактах фигурируют потоки платежей, то при их пересмотре (например, при изменении частоты или размера выплат, сокращении или увеличении срока ренты, отсрочке платежей, выкупе или досрочном погашении остатка ренты) составляется уравнение эквивалентности для приведенных величин потоков по старым условиям и по новым условиям.

Изменение условий производства платежей не может быть произвольным. Общим принципом такого изменения является безубыточность сторон, т. е. новые финансовые обязательства должны быть эквивалентны старым.

Например, при пролонгации срока платежа S_0 на n лет новая сумма (S_1) должна быть равна наращенной за этот срок сумме

$$S_1 = S_0\,(1 + i)^n,$$

если сумма выплачивается досрочно, то она должна быть дисконтирована и равна

$$S_1 = S_0 v^n.$$

Иногда составляют *уравнение эквивалентности*, которое позволяет решать более сложные задачи по определению сумм платежей в различных ситуациях.

17.3.1. Объединение платежей

При объединении (консолидации) платежа необходимо определить срок нового платежа, если известна его сумма.

Предположим, что объединяются платежи S_1, S_2, ..., S_k со сроками выплат n_1, n_2, ..., n_k, тогда финансовая эквивалентность достигается при применении формулы

$$n_0 = \frac{\log S_0 - \log \sum S_j V^{n_j}}{\log(1+i)}, \qquad (17.21)$$

если $S_0 = \sum S_j$, то

$$n_0 \approx \frac{\sum S_j n_j}{S_0}, \qquad (17.22)$$

где S_0, n_0 — сумма и срок нового платежа;

S_j, n_j — суммы и сроки объединяемых платежей.

Формула (17.22) дает результат, который всегда больше, чем по выражению (17.21), причем чем ниже значение процентной ставки i, тем меньше расхождение между полученными результатами.

Пример 5. Платежи $S_1 = 10\,000$ руб. (срок 5 лет) и $S_2 = 12\,000$ руб. (срок 10 лет) заменяются одним платежом, равным $S_0 = 22\,000$ руб. Найти срок платежа, считая $i = 6\%$.

Решение. По формуле (17.21) находим:

$$n_0 = \frac{\lg 22000 - \lg(10000 \cdot 1{,}06^{-5} + 12000 \cdot 1{,}05^{-10})}{\lg 1{,}06} = 6{,}75 \text{ года.}$$

По формуле (17.22):

$$n_0 \approx \frac{10000 \cdot 5 + 12000 \cdot 10}{22000} \approx 7{,}727 \text{ года.}$$

Ответ. Платеж необходимо провести через 6,75 года.

17.3.2. Уравнение эквивалентности

В уравнении эквивалентности сумма приведенных на один момент времени платежей, предусмотренных старыми условиями контракта, приравнивается аналогичной по содержанию величине платежа по новому контракту.

Если приведение осуществляется на начальный момент времени, то уравнение эквивалентности записывается в виде

$$\sum S_q v^n q = \sum S_k v^{n_k},$$

где S_k — заменяемые платежи со сроками n_k;
S_q — платежи со сроками n_q, предусматриваемые по новым условиям.

Пример 6. Существует обязательство произвести платеж через 5 лет, первоначальная сумма долга составляет 100 000 руб., проценты начисляются ежегодно по ставке $i = 0{,}05$.

Стороны согласились пересмотреть обязательство следующим образом: через 2 года выплачивается 30 000 руб., остальной долг гасится через 4 года. Определить сумму погасительного платежа.

Решение. Составим уравнение эквивалентности платежей. В качестве момента, на который приводятся платежи, можно принять: начало срока обязательства; момент уплаты 30 000 руб.; момент платежа старого обязательства; конец нового обязательства.

Составим уравнение эквивалентности для случая, когда в качестве момента приведения платежей принято начало срока обязательства:

$$100000 = 30000v^2 + Sv^6,$$

где S — искомый размер платежа;
v — дисконтный множитель.

Решая уравнение относительно S, получим

$$S = \frac{100000 - 30000 \cdot 1{,}05^{-2}}{1{,}05^{-6}} = 97544 \text{ руб.}$$

Ответ. Величина погасительного платежа составляет 97544 руб.

17.4. Амортизационные отчисления

Расчет амортизационных отчислений на предприятии служит целям:

1) вычислению подлежащей налогообложению прибыли (амортизационные отчисления относятся на себестоимость и, тем самым, уменьшают сумму налога);
2) вычислению прибыли предприятий, используемой на выплату дивидендов по акциям;
3) накоплению собственных средств для инвестиций в производство;
4) определению балансовой стоимости предприятия.

17.4.1. Методы равномерной и ускоренной амортизации

Налог на прибыль организаций является одной из основных статей формирования государственного бюджета, поэтому регулируется государством (глава 25 Налогового кодекса РФ).

Применяют методы равномерной и ускоренной амортизации.

Если предприятие купило в данном году оборудование, то в случае равномерной амортизации оно списывает его стоимость на затраты равными долями в течение нормативного периода. Так как списывается номинальная стоимость покупки оборудования без индексации, то себестоимость продукции будет со временем существенно занижена при высокой инфляции, что приведет к завышенной сумме налога с предприятия.

Ускоренный метод амортизации применяют при необходимости быстрой обновляемости парка оборудования.

Рассмотрим процесс уменьшения балансовой стоимости имущества. Машины, оборудование, здания (основной капитал) имеют определенный срок службы. Поэтому стоимость этого имущества, зафиксированная в документах, уменьшается за время срока службы до нуля. Суммы, на которые уменьшается стоимость имущества, образуют амортизационные отчисления.

Существует несколько методов расчета уменьшения стоимости имущества. Наиболее простым является метод равномерной амортизации, когда стоимость оборудования уменьшается ежегодно на один и тот же процент. Если срок службы оборудования n лет, первоначальная стоимость P, ежегодно стоимость уменьшается на $\frac{P}{n}$. Это значение является величиной амортизационных отчислений. Стоимость имущества в конце каждого года (A_k) определяется выражением

$$A_k = P - \frac{kP}{n}, \quad k = \overline{1, n}.$$

Стоимость имущества в конце первого года $A_1 = P - \frac{P}{n}$, в конце второго —

$$A_2 = P - \frac{2P}{n}; \quad \ldots \quad A_n = P - \frac{nP}{n} = 0.$$

Эти числа образуют арифметическую прогрессию, разность которой $\left(-\frac{P}{n}\right)$.

Обычно стоимость имущества P уменьшается не до нуля, а до некоторой остаточной величины $\overline{P}$, которую может получить предприятие сдав его на металлолом. В этом случае уменьшение первоначальной стоимости следует производить на величину разности между первоначальной стоимостью и остаточной стоимостью имущества через n лет:

$$\overline{P} = P - P_n.$$

Пример 7. Фирма приобрела станок за 320 тыс. руб. Срок службы станка составляет 8 лет. Составить таблицу уменьшения стоимости станка по годам, рассмотрев два случая:

а) стоимость станка уменьшается до нуля;

б) станок имеет остаточную стоимость 50 тыс. руб. Принять, что уменьшение стоимости оборудования происходит равномерно.

Решение.

а) Ежегодно стоимость станка снижается на $\dfrac{320}{8} = 40$ тыс. руб. (табл. 17.1).

б) Остаточная стоимость станка через n лет составит

$$P_n = P - \overline{P} = 320 - 50 = 270 \text{ тыс. руб.}$$

Для метода равномерной амортизации стоимость ежегодно уменьшается на величину

$$\frac{P_n}{n} = \frac{270}{8} = 33{,}75 \text{ тыс. руб. (см. табл. 17.2).}$$

Таблица 17.1

Год службы	Амортизационные отчисления за год, тыс. руб.	Стоимость на конец года, тыс. руб.
0	0	320
1	40	280
2	40	240
3	40	200
4	40	160
5	40	120
6	40	80
7	40	40
8	40	0

Таблица 17.2

Год службы	Амортизационные отчисления за год, тыс. руб.	Стоимость на конец года, тыс. руб.
0	0	320
1	33,75	286,25
2	33,75	252,5
3	33,75	218,75
4	33,75	185
5	33,75	151,25
6	33,75	117,5
7	33,75	83,75
8	33,75	50

Обычно равномерное уменьшение стоимости не соответствует реальному износу оборудования, так как износ идет быстрее в начале срока эксплуатации, чем в его конце. Поэтому имеются методы ускоренной, неравномерной амортизации.

Рассмотрим уменьшение стоимости имущества по закону убывающей арифметической прогрессии (схема ускоренной амортизации).

Обозначим S — сумму членов арифметической прогрессии, тогда

$$S = \frac{1+n}{2}n.$$

Согласно методу ускоренной амортизации в конце 1-го года стоимость оборудования уменьшается на $\frac{n}{S}$ часть P;

в конце 2-го года уменьшается на $\frac{n-1}{S}$ часть P;

в конце 3-го года — на $\frac{n-2}{S}$ часть P и т. д.;

в конце n-го года стоимость оборудования уменьшается на — часть P.

Если стоимость оборудования P уменьшается не до нуля, а до некоторой остаточной стоимости $\overline{P}$, то снижение стоимости умножается не на величину P, а на $\overline{P} = P - P_n$.

Пример 8. Рассмотрим ту же задачу для случая ускоренной амортизации, когда $\overline{P} = 50$ тыс. руб.

Решение.

$$S = 1 + 2 + \ldots + 8 = \frac{8(8+1)}{2} = 36.$$

В конце 1-го года стоимость имущества уменьшается на величину

$$\frac{8}{36}(320 - 50) = 60 \text{ тыс. руб.}$$

В конце 2-го года уменьшается $\frac{7}{36}270 = 52{,}5$ тыс. руб.

В конце 8-го года уменьшается $\frac{1}{36}270 = 7{,}5$ тыс. руб.

Стоимость станка на конец 1-го года составит: $320 - 60 = 260$ тыс. руб.

Стоимость станка на конец 2-го года составит: 260 тыс. руб. – 52,5 = = 507,5 тыс. руб. и т. д. Полученные данные вычислений занесем в табл. 17.3.

Таблица 17.3

Год службы	Амортизационные отчисления за год, тыс. руб.	Стоимость на конец года, тыс. руб.
0	0	320
1	60	260
2	52,5	207,5
3	45	162,5
4	37,5	125
5	30	95
6	22,5	72,5
7	15	57,5
8	7,5	50

Амортизационные отчисления образуют арифметическую прогрессию с первым членом 60, разностью — 7,5. Остаточные значения (стоимость на конец года) не образуют арифметической прогрессии.

17.4.2. Метод фиксированного процента

Рассмотрим метод фиксированного процента, который заключается в том, что стоимость имущества снижается к концу каждого года на одно и то же число процентов i от его стоимости на начало года.

Определим стоимость имущества на конец каждого года. Если первоначальная стоимость имущества P, то к концу первого года она будет снижена до Pi и станет равной

$$P - Pi = P\,(1 - i).$$

В конце второго года она снизится на величину $P\,(1 - i)\,i$ и станет равной

$$P\,(1 - i) - P\,(1 - i)\,i = P\,(1 - i)^2$$

и т. д., в конце k-го года стоимость имущества и станет равной

$$P_k = P\,(1 - i)^k.$$

Если остаточная стоимость имущества $\overline{P}$, то

$$P\,(1 - i)^n = \overline{P},$$

откуда $1 - i == \sqrt[n]{\dfrac{\overline{P}}{P}}$, $i = 1 - \sqrt[n]{\dfrac{\overline{P}}{P}}$.

Пример 9. Фирма купила универсальный станок за 600 тыс. руб. со сроком службы — 5 лет. Определить фиксированный процент снижения стоимости и составить таблицу стоимости станка по годам, приняв остаточную стоимость равной 50 тыс. руб.

Решение. Фиксированный процент, на который снижается стоимость станка, ежегодно составит

$$i = 1 - \sqrt[5]{\frac{50}{600}} = 1 - \sqrt[5]{0{,}08333} = 0{,}3916 \text{ или } i = 39{,}16\%.$$

Расчет стоимости станка по годам приведен в табл. 17.4.

Таблица 17.4

Год службы	Амортизационные отчисления за год, тыс. руб.	Стоимость на конец года, тыс. руб.
0	0	600
1	$600 \cdot 0{,}3916 = 234{,}96$	365,04
2	$365{,}04 \cdot 0{,}3916 = 142{,}95$	222,09
3	$222{,}09 \cdot 0{,}3916 = 86{,}97$	135,12
4	$135{,}12 \cdot 0{,}3916 = 52{,}913$	82,207
5	$82{,}207 \cdot 0{,}3916 = 32{,}192$	50,015

Ответ. Фиксированный процент составляет $i = 39{,}16\%$.

17.4.3. Метод двойного процента

При применении метода часто i является неудобным числом и способ не дает возможности снижения стоимости до нуля, так как $(1 - i)^n > 0$. Поэтому на практике применяют способ двойного процента.

Метод состоит в том, что фиксированный процент снижения стоимости i принимается равным удвоенному проценту снижения стоимости при равномерном снижении.

Такое снижение осуществляется до какого-нибудь года, пока остаточная стоимость остается больше предполагаемой остаточной стоимости, после этого уменьшение стоимости производится равномерно.

Пример 10. Составить таблицу уменьшения стоимости станка предыдущего примера способом двойного процента.

Решение. Стоимость станка снижается за 5 лет с 600 тыс. руб. до 50 тыс. руб., т. е. на величину 550 тыс. руб. При равномерном методе стоимость снижается ежегодно на $\frac{550 \text{ тыс. руб.}}{5} = 110$ тыс. руб., это составляет $\frac{110 \text{ тыс. руб.}}{550 \text{ тыс. руб.}} = \frac{1}{5}$, $i = 20\%$. Примем $i = 40\%$.

Составим таблицу снижения стоимости станка методом фиксированного процента (табл. 17.5).

Таблица 17.5

Год службы	Амортизационные отчисления за год, тыс. руб.	Стоимость на конец года, тыс. руб.
0	0	600
1	$600 \cdot 0{,}4 = 240$	360
2	$360 \cdot 0{,}4 = 144$	216
3	$216 \cdot 0{,}4 = 86{,}4$	129,6
4	$129{,}6 \cdot 0{,}4 = 51{,}84$	77,76
5	$77{,}76 \cdot 0{,}4 = 31{,}104$	46,656

Так как остаточная стоимость меньше ожидаемой ($46{,}656 < 50{,}0$ тыс. руб.), то можно стоимость, оставшуюся после 3-го года (129,6 тыс. руб.), снизить за оставшиеся 2 года до остаточной стоимости (50 тыс. руб.) равномерно, т. е. на $\frac{129{,}6 - 50}{2} = 39{,}8$ тыс. руб. Результаты расчетов поместим в табл. 17.6.

Таблица 17.6

Год службы	Амортизационные отчисления за год, тыс. руб.	Стоимость на конец года, тыс. руб.
0	0	600
1	240	360
2	144	216
3	86,4	129,6
4	39,8	89,8
5	39,8	50

17.5. Выбор инвестиционных и коммерческих проектов

Проведем анализ эффективности инвестиционных и коммерческих проектов, когда денежные средства сначала вкладываются в какую-либо предпринимательскую деятельность, а затем возвращаются, принося инвестору определенную прибыль.

Задача инвестора состоит в том, что на основании имеющихся на начало проекта данных о доходности вложений и их прогнозе выбрать оптимальный вариант вложения имеющихся у него денежных средств. Построение и использование математических моделей, выяснение связи между параметрами проекта является неотъемлемой частью финансового анализа для принятия инвестором решения.

Экономический анализ эффективности инвестиций является сложной задачей, содержащей моменты неопределенности и риска. Для выбора наилучшего варианта вложения средств в инвестиционные проекты имеется несколько методик, основанных на использовании для сравнения вариантов инвестиций по следующим показателям:

- чистый приведенный доход;
- внутренняя норма доходности;
- период окупаемости;
- индекс рентабельности.

Рассмотрим методики расчета инвестиций по вышеуказанным показателям.

17.5.1. Чистый приведенный доход

Чистый приведенный доход (*Netto Present Value*) обозначается *NPV*. Иногда данный показатель называют чистой текущей стоимостью.

Под *NPV* понимается разность дисконтированных величин чистого дохода и инвестиционных затрат. Общая величина дисконтированных доходов (*Present Value*) обозначается *PV*.

Чистый приведенный доход определяется по формуле:

$$NPV = \Sigma\, P_k/(1 + i)^k - IC, \tag{17.23}$$

где $P_1, P_2, ..., P_k$ — годовые доходы;

IC — инвестиции.

Общая величина дисконтированных доходов

$$PV = \Sigma\, P_k/(1 + i)^k, \tag{17.24}$$

$$NPV = PV - IC. \tag{17.25}$$

Примем для инвестора, что поток платежей является положительным, если он получает поступления, и отрицательным, если поток платежей является для него расходом. Проект с отрицательным значением *NPV* является нецелесообразным для инвестора. Среди вариантов с положительным *NPV* целесообразно выбрать тот, у которого *NPV* больше. Однако этот лучший вариант по *NPV* надо сравнивать с другими проектами, имеющими положительное значение *NPV*, но более рентабельными и к тому же менее рискованными.

Пример 11. Проанализировать проект с характеристиками: требуемая инвестиция 140 млн ден. ед, предлагаемые денежные поступления по годам (млн ден. ед.) в объеме 30; 60;60; 40. Рассмотреть два случая: а) ставка дисконтирования 12% в год; б) ставка дисконтирования по годам (%) 12; 14; 14; 15.

Решение. Коэффициенты дисконтирования по годам для случая а) составят:

Для 1-го года $1/(1 + 0{,}12) = 0{,}893$.

Для 2-го года $1/(1 + 0{,}12)^2 = 0{,}797$.

Для 3-го года $1/(1 + 0{,}12)^3 = 0{,}712$.

Для 4-го года $1/(1 + 0{,}12)^4 = 0{,}6355$.

NPV проекта для случая а) будет равна:

$$NPV = 30 \cdot 0{,}893 + 60 \cdot 0{,}797 + 60 \cdot 0{,}712 + 40 \cdot 0{,}6355 - 140 =$$
$$= 2{,}745 \text{ млн ден. ед.}$$

Вычислим *NPV* проекта для случая б):

$$NPV = 30/1{,}12 + 60/(1{,}12 \cdot 1{,}14) + 60/(1{,}12 \cdot 1{,}14^2) +$$
$$+ 40/(1{,}12 \cdot 1{,}14^2 \cdot 1{,}15) - 140 = -1{,}104 \text{ млн ден. ед.}$$

Ответ. Вариант а): проект приемлемый. Вариант б): проект неприемлемый.

Следует отметить, что существуют таблицы определения дисконтных множителей, что облегчает процедуру дисконтирования и обоснования выбора инвестиционного проекта. В табл. 17.7 приведены некоторые значения дисконтных множителей.

Таблица 17.7

Годовой отсчет, начиная с сегодняшней даты	1%	10%	15%	20%	25%
1	0,990	0,909	0,870	0,833	0,769
2	0,980	0,826	0,756	0,694	0,640
3	0,971	0,751	0,658	0,579	0,512
4	0,961	0,683	0,552	0,482	0,410
5	0,951	0,621	0,497	0,402	0,328
6	0,942	0,564	0,432	0,335	0,262
7	0,933	0,513	0,376	0,279	0,210
8	0,923	0,467	0,327	0,233	0,168
9	0,914	0,424	0,284	0,194	0,134
10	0,905	0,386	0,247	0,162	0,107

17.5.2. Внутренняя норма доходности

Внутренняя норма доходности (*Internal Rate of Return*) обозначается *IRR*. Это расчетная ставка процентов, при которой капитализация получаемого регулярно дохода дает сумму, равную инвестициям, что означает их окупаемость. Она показывает значение процентной ставки i, при которой *NPV* проекта равно нулю. Рекомендуется отбирать те проекты, внутренняя норма доходности которых не ниже 15–20%.

Проекты должны отбираться с учетом инфляционного фактора.

Пример 12. Определить значение внутренней нормы доходности для проекта, рассчитанного на три года, требующего инвестиции в размере 10 млн ден. ед. и имеющего предполагаемые денежные поступления (в млн ден. ед.) в размере 3; 4; 7.

Решение. Составим уравнение доходности:

$$3/(1+i) + 4/(1+i)^2 + 7/(1+i)^3 - 10 = 0 = f(i).$$

Для решения такого нелинейного уравнения возьмем два произвольных значения процентных ставок: $i = 10\%$, $i = 20\%$ и подставим эти значения в уравнение доходности, получим для $i = 10\%$ $NPV = 1{,}29$, при $i = 20\%$ $NPV = -0{,}67$.

Фактическое значение процентной ставки (IRR), при котором $NPV = 0$, определим по выражению

$$i_н + f(i_н)\,(i_в - i_н)/[f(i_н) - f(i_в)] = IRR, \qquad (17.26)$$

где $i_н$, $i_в$ — соответственно нижнее и верхнее значения процентных ставок,

получим

$$IRR = 10\% + 1{,}29\,(20\% - 10\%)/[1{,}29 - (-0{,}67)] = 16{,}6\%.$$

Ответ. Внутренняя норма доходности проекта составляет 16,6%. Проект следует принять.

17.5.3. Период окупаемости капиталовложений

Период окупаемости капиталовложений (*Payback period*) обозначается *PP*, данный показатель иногда называют сроком окупаемости инвестиций. Это срок, за который можно возвратить инвестированные в проект денежные средства. Метод определения *PP* является наиболее простым и распространенным в мировой практике.

Расчет периода окупаемости может производиться без учета времени, так называемый бухгалтерский метод. По этому методу денежные суммы не приводятся к одному временному сроку. По нему можно узнать, сколько времени необходимо инвестору для возмещения вложенных средств. Период окупаемости проекта зависит от равномерности распределения доходов от инвестиций. Если доход распределен по годам равномерно, то период окупаемости рассчитывается делением единовременных затрат на величину годового дохода, обусловленного этими затратами. При получении дробного числа лет оно округляется в сторону увеличения до ближайшего целого числа. Если прибыль распределена неравномерно, то период окупаемости рассчитывается прямым подсчетом числа лет, в течение которых инвестиция будет погашена. Недостатком метода является занижение срока окупаемости.

При более точном определении периода окупаемости все денежные суммы приводятся к одному моменту времени — моменту завершения инвестиций, а затем определяется период окупаемости капиталовложений.

Недостатком обоих методов расчета периода окупаемости капиталовложений является то, что они не учитывают доходы и расходы, которые могут быть после момента полного возмещения денежных средств. Однако приведенная стоимость отдаленных платежей быстро падает и не оказывает существенного влияния на величину периода окупаемости.

При выборе инвестиционного проекта исходят из того, что если срок окупаемости больше допустимой для фирмы величины, то проект с рассмотрения снимается.

Пример 13. Данные об инвестиционных проектах приведены в табл. 17.8. Определить период окупаемости капиталовложений по двум методам, приняв годовую процентную ставку 16%.

Таблица 17.8

Наименование	Временной период, год						
	0	1	2	3	4	5	6
Денежные потоки (R_n)	–90	10	20	30	30	40	60
Сумма денежных потоков ΣR_n	–90	–80	–60	–30	0	40	100

Решение. Определим срок окупаемости капиталовложений без приведения денежных потоков к начальному моменту времени.

Из табл. 17.8 следует, что срок окупаемости составляет 4 года, так как сумма денежных потоков за 4 года будет равна

$$-90 + 10 + 20 + 30 + 30 = 0.$$

Определим срок окупаемости с приведением денежных потоков к начальному моменту времени. Результаты расчетов представим в табл. 17.9.

Таблица 17.9

Наименование	Временной период, год						
	0	1	2	3	4	5	6
Денежные потоки (R_n)	–90	10	20	30	30	40	50
$(1 + i)^{-n}$	1	0,862	0,743	0,641	0,552	0,476	0,410
$R_n(1 + i)^{-n}$	–90	8,62	14,86	19,23	16,56	19,04	24,6
$\Sigma R_n (1 + i)^{-n}$	–90	–81,4	–66,6	–47,3	–30,7	–11,7	9,2

Сравнивая результаты расчетов за 5-й и 6-й годы, из таблицы видно, что уточненный период окупаемости составляет ~5,5 вместо 4 лет, полученных без приведения денежных потоков к начальному моменту времени.

Ответ. Период окупаемости проекта без приведения денежных потоков к начальному моменту времени составляет 4 года, с приведением денежных потоков к начальному моменту времени — 5,5 лет.

17.5.4. Индекс рентабельности

Индекс рентабельности проекта представляет отношение суммы всех дисконтированных денежных доходов от инвестиций к сумме всех дисконтированных расходов. Обозначается индекс *Pl*.

$$Pl = \Sigma\, PV : IC. \tag{17.27}$$

Если индекс рентабельности меньше 1, то проект следует отклонить, а среди проектов, у которых индекс больше 1, следует отдать предпочтение проекту с наибольшем индексом рентабельности. Если у проекта индекс рентабельности равен 1, то проект не является ни прибыльным, ни убыточным. Однако следует иметь в виду, что не всегда проект с самым большим индексом рентабельности имеет и самый высокий чистый приведенный доход.

Пример 14. Имеются проекты 1 и 2. Для проекта 1 сумма дисконтированных доходов от инвестиций составляет 15 млн ден. ед., а сумма дисконтированных расходов 9 млн ден. ед. Для проекта 2 соответственно 12 млн ден. ед. и 6 млн ден. ед. Определить, какой проект с точки зрения индекса рентабельности является более предпочтительным.

Решение. Вычислим индексы рентабельности проектов:

$$Pl_1 = 15/9 = 1{,}67,\ Pl_2 = 12/6 = 2{,}0.$$

Ответ. С точки зрения индекса рентабельности проект 2 предпочтительнее проекта 1.

Однако проект 1 позволяет инвестировать больший чистый приведенный доход *NPV*, что экономически может оказаться более привлекательным. Это показывает, что индекс рентабельности является относительным показателем. Он характеризует уровень доходов, приходящихся на единицу затрат, т. е. эффективность вложений: чем больше значение показателя, тем выше отдача каждого рубля, инвестированного в рассматриваемый проект.

Индекс рентабельности удобен при выборе одного проекта из альтернативных, имеющих примерно одинаковые значения *NPV*, но разные объемы требуемых инвестиций. В этом случае выгоднее принять тот проект, который обеспечивает большую эффективность вложений.

Рассмотрим пример применения рассмотренных методов выбора инвестиционных проектов.

Пример 15. Фирма предложила ведущему менеджеру рассмотреть целесообразность приобретения нового технологического оборудования для выпуска пользующегося спросом изделия стоимостью 50 млн ден. ед. Предусматривается, что срок эксплуатации оборудования составит 5 лет, срок окупаемости не более 4 лет, износ на оборудование начисляется по методу равномерной амортизации, ликвидационная стоимость оборудования будет достаточной для покрытия расходов, связанных с демонтажем оборудования. Выручка от реализации производимых изделий ожидается по годам в следующих объемах (млн ден. ед.): 1-й год — 25; 2-й год — 30; 3-й год — 32; 4-й год — 30; 5-й год — 24. Текущие расходы оцениваются в первый год эксплуатации оборудования в 12 млн ден. ед. с последующим их ежегодным ростом на 3%. Ставка налога на прибыль составляет 24%.

Сложившееся финансовое положение фирмы таково, что цена рентабельности авансированного капитала составляет 16%.

Решение. Решение данной задачи проведем в три этапа.

1. Определение заданных исходных данных по годам.
2. Расчет показателей, используемых для выбора проекта.
3. Анализ показателей и вывод.

Этап 1. Имеющиеся исходные данные и необходимые результаты расчета (в млн ден. ед.) запишем в табл. 17.10.

Таблица 17.10

Показатели	Годы				
	1	2	3	4	5
1. Объем реализации	25	30	32	30	24
2. Текущие расходы	12	12,36	12,7318	13,113	13,506
3. Амортизация	10	10	10	10	10
4. Налогооблагаемая прибыль	3	7,64	9,269	6,887	0,494
5. Налог на прибыль	0,72	1,8336	2,2246	1,6529	0,1186
6. Чистая прибыль	2,28	5,8064	7,0444	5,2341	0,3754
7. Чистые поступления	12,28	15,8064	17,0444	15,2341	10,3754

1.1. Объем реализации по годам задан в условии задачи.

1.2. Определим текущие расходы, они увеличиваются на 3% в год и составят (млн ден. ед.):

в 1-й год — 12;

во 2-й год : $12 \cdot 1,03 = 12{,}36$ и т. д.

1.3. При использовании равномерной амортизации ежегодные отчисления на нее равны:

$$50 \text{ млн ден. ед.} : 5 \text{ лет} = 10 \text{ млн ден. ед.}$$

1.4. Налогооблагаемая прибыль составит (млн ден. ед.)

в 1-й год: $25 - 12 - 10 = 3$,

во 2-й год: $30 - 12{,}36 - 10 = 7{,}64$ и т. д.

1.5. Определим налог на прибыль (млн ден. ед.), который составляет 24% от налогооблагаемой прибыли

в 1-й год: $3 \cdot 0{,}24 = 0{,}72$;

во 2-й год: $7{,}64 \cdot 0{,}24 = 1{,}8336$ и т. д.

1.6. Чистая прибыль (млн ден. ед.) будет равна

в 1-й год: $3 - 0{,}72 = 2{,}28$,

во 2-й год: $7{,}64 - 1{,}8336 = 5{,}8064$ и т. д.

1.7. Чистые поступления (млн ден. ед.) составят

в 1-й год: $25 - 12 - 0{,}72 = 12{,}28$,

во 2-й год: $30 - 12{,}36 - 1{,}8336 = 15{,}8064$ и т. д.

Этап 2. Расчет показателей, используемых для выбора проекта.

2.1. Определим чистую приведенную стоимость (млн ден. ед.), при $i = 16\%$.

$$NPV = 12{,}280/(1 + 0{,}16) + 15{,}8064/(1 + 0{,}16)^2 + 17{,}0444/(1 + 0{,}16)^3 + 15{,}2341/(1 + 0{,}16)^4 + 10{,}3754/(1 + 0{,}16)^5 = -3{,}3836.$$

2.2. Внутреннюю норму доходности вычислим из выражения (17.26). По формуле (17.23) для $i = 15\%$ $NPV = -2{,}2841$ млн ден. ед., для $i = 12\%$ $NPV = 1{,}3826$ млн ден. ед.

$$IRR = 0{,}12 + 1{,}3826 \cdot (0{,}15 - 0{,}12)/(1{,}3826 + 2{,}2841) = 0{,}1313.$$

$$IRR = 13{,}13\%.$$

2.3. Период окупаемости (PP) менее 4 лет, так как сумма чистых денежных поступлений (млн ден. ед.) за этот период равна

$$12{,}28 + 15{,}8064 + 17{,}0446 + 15{,}2341 = 60{,}3653 \text{ млн ден. ед.},$$

стоимость нового оборудования – 50 млн ден. ед. и 60,3653 млн ден. ед. > 50 млн ден. ед.

2.4. Определим индекс рентабельности (Pl) по выражению

$$Pl = \Sigma\, PV : IC.$$

Для 1-го года $PV = 12{,}28/(1 + 0{,}16) = 10{,}5862$ млн ден. ед.

Для 2-го года $PV = 15{,}8064/(1 + 0{,}16)^2 = 11{,}7467$ млн ден. ед. и т. д. $\Sigma\, PV = 46{,}6164$ млн ден. ед.

$$Pl = \Sigma\, PV : IC = 46{,}6164 : 50 = 0{,}93.$$

Этап 3. Проведем анализ полученных коэффициентов:

$NPV = -3{,}3836$ — проект неприемлемый;

$IRR = 13{,}13\% < 16\%$ — проект следует отвергнуть;

PP менее 4 лет — проект пригоден;

$Pl = 0{,}93 < 1$ — проект непригоден.

Ответ. Менеджеру следует рекомендовать руководству фирмы проект не принимать.

17.6. Модели операций с ценными бумагами

17.6.1. Облигации

Одним из важнейших инструментов для инвестиций в промышленность, сельское хозяйство является рынок ценных бумаг, в том числе выпуск облигаций, гарантирующих получение дохода и высокую надежность.

Кроме государства облигации может выпускать также региональная власть, банки и корпорации.

Определение 1. *Облигация* — ценная бумага, представляющая долговое обязательство правительства или фирмы и гарантирующая владельцу возврат долга с процентами в течение некоторого периода времени в форме регулярных выплат определенной суммы денег, выигрышей или другими способами.

На облигации указывается *номинальная стоимость*, а также *выкупная цена*, которая может отличаться от номинальной стоимости, или формула, по которой выкупная цена рассчитывается. Кроме того, указываются срок выкупа эмитентом (предприятием, выпустившим облигацию), норма доходности и сроки выплаты процентов. Обычно проценты выплачиваются ежегодно, по полугодиям или поквартально.

Государственные и региональные облигации выпускаются под гарантии государства и местной власти, облигации корпораций под залог имущества.

По сроку погашения различают *краткосрочные* облигации (до 1 года), *среднесрочные* (от 1 года до 5 лет) и *долгосрочные* (свыше 5 лет). Выпускаются облигации и без указания срока погашения. Такие облигации могут быть выкуплены в любой момент.

Применяются выплаты дохода по облигациям по *фиксированным* и *переменным* во времени процентным ставкам. В последнем случае применяется ступенчатая процентная ставка. Например, для большей финансовой привлекательности процентная ставка возрастает по годам. Возможна также *плавающая процентная ставка* в зависимости от уровня ссудного процента.

Для защиты от инфляции практикуется индексирование номиналов облигаций пропорционально индексу потребительских цен.

Для облигаций без выплаты процентов выкупная цена устанавливается ниже номинальной и доход выплачивается при погашении облигаций.

Доходом от облигаций являются фиксированные проценты в сумме с разностью между номинальной стоимостью облигации и ценой ее покупки, а также доходом от реинвестиций процентных денег.

Под *курсом облигации* p_k % понимается отношение цены, по которой продается облигация P, к номинальной стоимости облигации N в процентах.

$$p_k\,\% = \frac{P}{N}100\% \qquad (17.28)$$

Пример 16. Номинальная стоимость облигации 1000 ден. ед. Продается по цене 950 ден. ед. Определить курс облигации.

Решение. По формуле (17.28) находим:

$$p_k\,\% = \frac{950}{1000} = 95\%.$$

Ответ. Курс облигации составляет 95%.

Несмотря на более низкий доход по сравнению с другими видами ценных бумаг, облигации — более надежный метод инвестиций капитала и поэтому находят широкое применение в финансовой практике, являясь обязательной составляющей активов страховых и пенсионных фондов, финансовых компаний.

17.6.2. Облигации без выплаты процентов

Прибыль от облигации представляет разность между номинальной стоимостью и ценой.

Обозначим N — номинальная стоимость облигации, P — цена продажи облигации, D — доход от продажи облигации, тогда

$$D = N - P. \qquad (17.29)$$

Из выражения (17.28):

$$P = p_k\,\% \cdot N/100\%. \qquad (17.30)$$

Тогда

$$D = N - P = N - p_k\,\% \cdot N/100\% = N\,(1 - p_k\,\%/100\%). \qquad (17.31)$$

У таких облигаций обычно более короткий срок погашения (до года). Определим доходность покупки облигации по ставке простых процентов:

$$S = P\,(1 + i_э t/K) = (1 + i_э t/K)\,p_K\,\% \cdot N/100\%, \qquad (17.32)$$

где S — наращенная сумма;

t/K — срок на который выпущена облигация;

$i_э$ — эффективная ставка простых процентов.

Доход от покупки облигации

$$D = S - P; \qquad (17.33)$$

Учитывая выражения (17.30), (17.31), (17.32), получим

$$i_э = K\,(100\% - p_k\,\%)/t\,p_k\,\%. \qquad (17.34)$$

Определим доходность покупки облигации по ставке сложных процентов:

$$S = P\,(1 + i_э)^{t/k},\ D = S - P = P\,(1 + i_{э\,с})^{t/k} - P, \qquad (17.35)$$

где $i_{э\,с}$ — эффективная ставка сложных процентов.

С учетом (17.30), получим:

$$D = [(1 + i_{э\,с})^{t/k} - 1]\,p_k\,\%N/100\%. \qquad (17.36)$$

Приравнивая выражения (17.31) и (17.36), найдем:

$$i_{э\,с} = (100\%/p_k\,\%)^{k/t} - 1. \qquad (17.37)$$

Пример 17. Фирма купила 50 облигаций номинальной стоимостью 50 тыс. ден. ед. каждая по курсу 95%. Срок погашения — 4 месяца. Определить эффективную ставку прибыли по простым и сложным процентам и прибыль от сделки.

Решение. Доход от покупки одной облигации по формуле (17.31) составит:

$$D = N\,(1 - p_k\,\%/100\%) = 50\,(1 - 95\%/100\%) = 2{,}5 \text{ тыс. ден. ед.}$$

Доход от покупки 50 облигаций равен:

$$2{,}5 \cdot 50 = 125 \text{ тыс. ден. ед.}$$

Эффективная ставка прибыли по простым процентам по формуле (17.34) составит:

$$i_э = K\,(100\% - p_k\,\%)/t\,p_k\,\% = 12\,(100\% - 95\%)/(4 \cdot 95\%) = 0{,}1579,$$

$$i_э = 15{,}79\%.$$

Эффективная ставка прибыли по сложным процентам по формуле (17.37) равна:

$$i_{э\,с} = (100\%/p_k\,\%)^{k/t} - 1 = (100\%/95)^{12/\,4} = 0{,}1664,$$

$$i_{э\,с} = 16{,}64\%.$$

Ответ. Эффективная ставка прибыли по простым процентам составляет 15,79%, по сложным — 16,64%, доход от покупки 50 облигаций равен 125 тыс. ден. ед.

17.6.3. Облигации с выплатой процентов в конце срока погашения

Обычно такие облигации выпускаются на продолжительный срок. Прибыль на них состоит из процентов, рассчитанных по ставке сложных процентов и разности между номинальной стоимостью и ценой покупки. *Доходность* облигации с номинальной стоимостью N, сложной процентной годовой ставкой i_c и ценой продажи P составляет:

$$D = N - P + N\,(1 + i_c)^n - N, \tag{17.38}$$

где выражение $N\,(1 + i_c\,)^n - N$ — процентные деньги,

$$P = N\,p_k\,\%/100\%.$$

Тогда

$$D = N\,[(1 + i_c)^n - p_k\,\%/100\%]. \tag{17.39}$$

Выведем выражение для определения эффективной годовой ставки сложных процентов ($i_{эс}$). Приравняем формулы (17.32) и (17.36) и учитывая, что срок погашения облигации $n = t/K$ и $p_k\,\%/100\% = P/N$, найдем $i_{э\,с}$:

$$P\,(1 + i_{э\,с})^{t/k} - P = N\,[(1 + i_c)^n - p_k\,\%/100\%],$$

$$(1 + i_{э\,с})^{t/k} = \{N\,[(1 + i_c)^n - p_k\,\%/100\%]/P\} + 1,$$

$$i_{\text{э с}} = [(1 + i_c)/(p_k\,\%/100\%)^{1/n}] - 1. \qquad (17.40)$$

Пример 18. Фирма купила 20 облигаций по 150 тыс. ден. ед. со сроком погашения 2 года. Облигации приобретены по курсу 98%, выпущены под процентную ставку сложных процентов — 8% годовых. Определить прибыль от покупки и эффективную ставку сложных процентов.

Решение. По формуле (17.39) найдем прибыль от покупки одной облигации:

$$D = N\,[(1 + i_c)^n - p_k\,\%/100\%] = 150\,[(1 + 0{,}08)^2 - 98\% \,/\, 100\%] =$$
$$= 27960 \text{ ден. ед.}$$

Прибыль от покупки 20 облигаций составит:

$$20 \cdot 27{,}96 = 559{,}2 \text{ тыс. ден. ед.}$$

Найдем эффективную ставку сложных процентов по формуле (17.40):

$$i_{\text{э с}} = [(1 + i_c)/(p_k\,\%/100\%)^{1/n}] - 1 = [(1 + 0{,}08)/(98\%/100\%)^{1/2}] - 1 =$$
$$= 0{,}09096.$$

$$i_{\text{э с}} = 9{,}096\%.$$

Ответ. Доход от покупки 20 облигаций составит 559,2 тыс. ден. ед., а эффективная ставка сложных процентов 9,096%.

17.6.4. Акции

Определение 2. *Акции* — это ценные бумаги, свидетельствующие о внесении пая в капитал акционерного общества и дающие право на получение дивиденда из прибыли этого общества, право участия в управлении акционерным обществом и получения части имущества после его ликвидации.

Акции выпускаются акционерными обществами и бывают *простые* и *привилегированные*.

По простым акциям *размер дивидендов* заранее не фиксируется и не гарантируется. Величина дивидендов определяется общим собранием акционеров по итогам хозяйственной деятельности акционерного общества за истекший период. Простые акции дают право на управление акционерным обществом по принципу: одна акция — один голос, иногда несколько голосов.

По привилегированным акциям владельцы получают дивиденды в первую очередь. Минимальная величина дивидендов определяется фиксированными процентами от *номинальной суммы акции*. Величина процентов устанавливается акционерным обществом при выпуске акций. В случае ликвидации акционерного общества владелец имеет право на первоочередной возврат стоимости акции. Права на управление акционерным обществом привилегированные акции не дают.

Возможны различные варианты выплаты дивидендов по привилегированным акциям. Оплата акций *с накоплением дивидендов* приурочена к определенным датам, например, к выходу работника компании на пенсию. Акции *с плавающим дивидендом* учитывают инфляцию, *возвратные* могут отзываться фирмой с выплатой премии и т. д.

Под *курсовой стоимостью акции* (курсом акции) понимается цена акции, складывающаяся на фондовом рынке при ее покупке или продаже. Владелец акции может ее продать по курсовой стоимости, которая зависит от многих факторов и в первую очередь от рентабельности предприятия.

Под *номинальной стоимостью акции* (номинал) понимается указанная на акции цена, по которой она продается при первичном размещении акционерного капитала. Номинальная цена акции на рынке ценных бумаг значения почти не имеет.

Акции могут быть как *именными*, наименование владельца которых указано на бланке акции, так и *на предъявителя* без указания имени владельца. Именные акции могут быть проданы другому владельцу, но при этом делается запись в книге учета акций и отметка на обратной стороне акции.

Источником дохода от покупки акции является: разница между ценой продажи акции через какой-то период времени и ценой покупки, плюс дивиденды.

Величина дивидендов от простых акций определяется общим собранием акционеров, в связи с этим производимые расчеты являются ориентировочными.

Доход от привилегированных акций (D) равен процентным деньгам ($D\%$) плюс разность между ценой, по которой акции проданы через некоторое время P', и ценой покупки акции P.

$$D = D\% + P' - P. \tag{17.41}$$

Без реинвестиций

$$D\% = N\, n\, \rho, \tag{17.42}$$

где ρ — процентная ставка по привилегированным акциям;

n — срок в годах от покупки до продажи;

N — номинальная стоимость акции.

Если процентные деньги вновь инвестируются под процентную ставку сложных процентов i_c, то наращенная сумма представляет собой сумму финансовой ренты:

$$D\% = N\rho\,[(1 + i_c)^n - 1]/i_c. \tag{17.43}$$

Доходность от вложения денег в привилегированные акции найдем с использованием эффективной ставки сложных процентов ($i_{\text{э с}}$):

$$D = P\,(1 + i_{\text{э с}})^n - P,$$

$$i_{\text{э с}} = \sqrt{(D + P)/P - 1}. \tag{17.44}$$

Пример 19. Фирма приобрела 20 привилегированных акций номиналом по 200 тыс. ден. ед. с фиксированной процентной ставкой 20% в год. Стоимость этих акций ежегодно возрастает на 5% относительно номинальной. Полученные проценты вновь инвестируются под 10% годовых. Определить ожидаемый доход и доходность продажи акций через два года.

Решение. Процентные деньги от 20 акций за год составят:

$$D_1\% = 0{,}2 \cdot 200 \cdot 20 = 800 \text{ тыс. ден. ед.}$$

Доход от реинвестиций с учетом (17.43):

$$D\% = D_1\%\ [(1 + i_c)^n - 1]/i_c = 800\,[(1 + 0{,}1)^2 - 1]/0{,}1 = 1680 \text{ тыс. ден. ед.}$$

Цена покупки акций:

$$P = 200 \cdot 20 = 4000 \text{ тыс. ден. ед.}$$

Стоимость акций через два года:

$$P' = 200 \cdot 20 + 0{,}05 \cdot 200 \cdot 20 \cdot 2 = 4400 \text{ тыс. ден. ед.}$$

Ожидаемый доход:

$$D = 1680 + 4400 - 4000 = 2080 \text{ тыс. ден. ед.}$$

Эффективная процентная ставка доходности сделки по формуле (17.44) составит:

$$i_{\text{э с}} = \sqrt{(D + p)/p - 1} = \sqrt{(2080 + 4000)/4000 - 1} = 0{,}2329.$$

$$i_{\text{э с}} = 23{,}29\%.$$

Ответ. Ожидаемый доход от продажи 20 акций через 2 года составит 2080 тыс. ден. ед. при доходности сделки 23,29%.

Пример 20. Предприниматель выделил некоторую сумму, на которую он предполагает приобрести акции трех фирм. Эффективные процентные ставки доходности фирм составляют 15%, 17% и 18%. Сравните выгодность покупки акций для трех вариантов:

1. Первой фирмы на 50% выделенной суммы, второй — 30%, третьей — 20%;
2. Первой фирмы на 40% выделенной суммы, второй — 30%, третьей — 30%;
3. Первой фирмы на 30% выделенной суммы, второй — 40%, третьей — 30%.

Решение. Обозначим выделенную предпринимателем сумму на приобретение акций S. Доходы по вариантам составят:

$$D_1 = 0{,}5S \cdot 0{,}15 + 0{,}3S \cdot 0{,}17 + 0{,}2S \cdot 0{,}18 = 0{,}162S;$$

$$D_2 = 0{,}4S \cdot 0{,}15 + 0{,}3S \cdot 0{,}17 + 0{,}3S \cdot 0{,}18 = 0{,}165S;$$

$$D_3 = 0{,}3S \cdot 0{,}15 + 0{,}4S \cdot 0{,}17 + 0{,}3S \cdot 0{,}18 = 0{,}167S.$$

Ответ. Предпринимателю выгоднее покупать акции третьей фирмы.

17.7. Введение в актуарные расчеты

17.7.1. Основные понятия и определения

Актуарные расчеты — система математических и статистических расчетов, применяемых в страховании, отражающая механизм образования и расходования страхового фонда в долгосрочных страховых операциях, связанных с продолжительностью жизни населения.

Страхование — это система финансового обеспечения, предохраняющая от возможного ущерба страховым фондом, созданным за счет периодических взносов его участников.

Страховщик — специализированная организация, проводящая страхование.

Страхователь — физическое или юридическое лицо, уплачивающее страховые взносы и вступающее в конкретные страховые отношения со страховщиком.

Страховая сделка оформляется в виде специального документа — страхового полиса, который подписывается страхователем, руководителем страховой компании и заверяется печатью компании. В документе указывается:

- наименование страховщика, проводящего страхование;
- наименование страхователя;
- объект страхования;
- величина страховой суммы;
- начало и конец страхования;
- страховой тариф — процентная ставка от страховой суммы или плата с единицы страховой суммы;
- особые условия.

Страховой тариф включает нетто-ставку, состоящую из суммы страхового возмещения плюс накладные расходы страховщика (организационные расходы, аренда помещения, оплата труда, доход страховщика).

Для расчета страховых тарифов используют «таблицы смертности», в которых согласно переписи населения приведены расчетные данные, показывающие, как по годам уменьшается число живущих из одновременно родившихся 100 тыс. человек. Некоторые данные для возрастов от 50 лет до 65 лет «таблицы смертности» приведены в табл. 17.11.

Таблица 17.11

Возраст x	Мужчины			Женщины		
	l_x	q_x	d_x	l_x	q_x	d_x
50	79519	0,01409	1121	90792	0,00506	459
51	78398	0,01522	1193	90333	0,00554	500
52	77205	0,01637	1264	89833	0,00610	548
53	75941	0,01754	1332	89285	0,00673	601
54	74609	0,01872	1397	88684	0,00740	656
55	73212	0,01997	1462	88028	0,00806	709
56	71750	0,02136	1532	87319	0,00866	756
57	70218	0,02293	1610	86563	0,00919	795

Возраст x	Мужчины			Женщины		
	l_x	q_x	d_x	l_x	q_x	d_x
58	68608	0,02470	1695	85768	0,00969	831
59	66913	0,02665	1783	84937	0,01023	869
60	65130	0,02871	1870	84068	0,01094	919
61	63260	0,03080	1949	83149	0,01193	992
62	61311	0,03296	2021	82157	0,01318	1083
63	59290	0,03523	2089	81074	0,01467	1189
64	57201	0,03765	2153	79885	0,01634	1305
65	55048	0,04027	2217	78580	0,01819	1430

В таблице введены следующие обозначения:

x — возраст человека;

l_x — число лиц, доживших до возраста x лет;

d_x — число людей, умерших при переходе от x до $x + 1$ год;

q_x — вероятность смерти в возрасте x лет не доживших до $x + 1$ год.

Пример 21. Найдем вероятности следующих страховых событий:

- для лица, чей возраст 50 лет, вероятность прожить еще один год (P_{50}) составляет

$$P_{50} = l_{50+1}/l_{50} = 78398/79519 = 0{,}9859;$$

- вероятность умереть в течение предстоящего года (q_{50}) жизни равняется

$$q_{50} = d_{50}/l_{50} = 1121/79519 = 0{,}01409;$$

- вероятность прожить 5 лет (${}_5P_{50}$) составляет

$${}_5P_{50} = l_{50+5} \,/\, l_{50} = 73212/79519 = 0{,}9207;$$

- вероятность умереть в течение предстоящих 5 лет ($l_5\, q_{50}$) жизни равняется

$$l_5\, q_{50} = (l_{50} - l_{50+5})/l_{50} = (79519 - 73212)/79519 = 0{,}0793;$$

- вероятность умереть на 5-м году жизни (${}_{5|}q_{50}$) составляет

$${}_{5|}q_{50} = (l_{50+4} - l_{50+5})/l_{50} = (74609 - 73212)/79519 = 0{,}0176.$$

17.7.2. Страхование жизни

Пример 22. Мужчина в возрасте 60 лет заключает договор на страхование жизни сроком на 5 лет. Страховая сумма составляет 30 млн ден. ед. Страховщик предполагает инвестировать страховые взносы под 12% годовых.

Определить величину нетто-ставки для выплаты страховых сумм:

а) в случае единовременной оплаты;

б) в случае годичных взносов в конце года в течение срока страхования;

в) в случае годичных взносов в начале года в течение срока страхования.

Решение. Обозначим: $S_1 = 30$ млн ден. ед., $x = 60$, $n = 5$, $i = 0{,}12$.

а) Из табл. 17.11 для $x = 60$, $l_x = 65130$, до возраста $l_{65} = 55048$ человек. Для уплаты каждому дожившему до 65 лет по 30 тыс. ден. ед. необходим страховой фонд в размере

$$S = S_1 \cdot l_{65} = 30 \cdot 55048 = 1651440 \text{ тыс. ден. ед.}$$

Учитывая, что $i = 0{,}12$, достаточно иметь сумму

$$P = S/(1 + i)^5 = 1651440/(1 + 0{,}12)^{5} = 937071{,}4 \text{ тыс. ден. ед.}$$

Величина страхового взноса в общем виде составит

$$_nE_x = l_{x+n} \cdot S_1/[l_x(1 + i)^n]. \qquad (17.45)$$

Для данного примера

$$_5E_{60} = P/l_x = 937071{,}4/65130 = 14{,}388 \text{ млн ден. ед.}$$

б) Пусть страхователь платит годовые взносы $_nP_x$ в конце каждого года.

В конце 1-го года все дожившие до 61 года $l_{x+1} = 63260$ человек выплатят сумму $_nP_x \cdot l_{x+1}$, текущая стоимость которой $(_nP_x \cdot l_{x+1})/(1 + i)$; на следующий год сумма платежей $_n\mathrm{P}_x \cdot l_{x+2}$, текущая стоимость которой составит $(_nP_x \cdot l_{x+1})/(1 + i)^2$ и т. д.

Общая текущая стоимость страховых взносов за 5 лет составит

$$P = {_nP_x}\,[(l_{x+1})/(1 + i) + (l_{x+2})/(1 + i)^2 + \ldots + (l_{x+5})/(1 + i)^5]. \qquad (17.46)$$

Учитывая (17.45), текущая стоимость страховых взносов за 5 лет равна

$$P = S_1 \cdot l_{x+n}/(1+i)^n. \qquad (17.47)$$

Приравнивая выражения (17.46) и (17.47), для годичного взноса получим

$$_nP_x = S_1 \cdot l_{x+n}[(l_{x+1})/(1+i) + (l_{x+2})/(1+i)^2 + \ldots +$$
$$(l_{x+n})/(1+i)^n]^{-1}/(1+i)^n \qquad (17.48)$$

$$_5P_{60} = \frac{30 \cdot 55048}{(1+0{,}12)^5}\left[\frac{63260}{1{,}12} + \frac{61311}{1{,}12^2} + \frac{59290}{1{,}12^3} + \frac{57201}{1{,}12^4} + \frac{55048}{1{,}12^5}\right]^{-1} =$$
$$4{,}355 \text{ млн ден. ед.}$$

Общая сумма, вносимая страхователем за 5 лет составит

$$4{,}355 \text{ млн ден. ед.} \cdot 5 = 21{,}775 \text{ млн ден. ед.}$$

в) В случае когда страхователь платит взносы в начале года, текущая стоимость всех взносов в начале 1-го года равна $l_x \cdot {}_nP_x$. Текущая стоимость взносов за 2-й год $(l_{x+1} \cdot {}_nP_x)/(x^{-1} + i)$ и т. д.

Общая текущая стоимость страховых взносов за 5 лет составит

$$P = {}_nP_x\,[l_x + (l_{x+1})/(1+i) + \ldots + (l_{x+n-1})/(1+i)^{n-1}] =$$
$$= (S_1 \cdot l_{x+n})/(1+i)^n. \qquad (17.49)$$

Годичный взнос равен

$$_nP_x = S_1 \cdot l_{x+n}\,[l_x + (l_{x+1})/(1+i) + \ldots +$$
$$+ (l_{x+n-1})/(1+i)^{n-1}]^{-1}/(1+i)^n. \qquad (17.50)$$

$$_5P_{60} = \frac{30 \cdot 55048}{(1+0{,}12)^5}\left[65130 + \frac{63260}{1{,}12} + \frac{61311}{1{,}12^2} + \frac{59290}{1{,}12^3} + \frac{57201}{1{,}12^4}\right]^{-1} =$$
$$3{,}7627 \text{ млн ден. ед.}$$

Общая сумма, вносимая страхователем за 5 лет, составит

$$3{,}7627 \cdot 5 = 18{,}8138 \text{ млн ден. ед.}$$

17.7.3. Страхование на случай смерти

Пример 23. Мужчина в возрасте 60 лет застраховал себя на случай смерти сроком на 5 лет. Страховая сумма — 50 млн ден. ед. Страховщик инвестирует собранные суммы под 12% годовых. Определить величину нетто-ставки на случай смерти:

а) в случае единовременной оплаты;

б) в случае годичных взносов в конце года в течение срока страхования;

в) в случае годичных взносов в начале года.

Решение. Обозначим $x = 60$, $n = 5$, $S_1 = 50$ млн ден. ед., $i = 0{,}12$.

а) Из 100 000 человек, родившихся одновременно, в живых к 60 годам останется $l_x = 65\,130$ человек. Пусть каждый из них единовременно оплатил страховщику нетто-ставку ${}_nA_x$ руб.

Суммарная страховая сумма:

$$S = {}_nA_x \cdot l_x\,. \qquad (17.51)$$

Из этой страховой суммы и начисленных процентов и происходят выплаты по случаю смерти страхователей.

В течение строка страхования умрут d_x, d, d_{x+2}, d_{x+3} и d_{x+4} человек, причем из «таблицы смертности» следует, что $d_{60} = 1870$, $d_{61} = 1949$, $d_{62} = 2021$, $d_{63} = 2089$, $d_{64} = 2153$.

Суммарная современная стоимость выплат по случаю смерти страхователей находится дисконтированием:

$$S = \frac{S_1 d_x}{1+i} + \frac{S_1 d_{x+1}}{(1+i)_2} + \ldots + \frac{S_1 d_{x+n-1}}{(1+i)_n},$$

$${}_nA^x \quad = \frac{S_1}{l_x}\left(\frac{d_x}{1+i} + \frac{d_{x+1}}{(1+i)^2} + \ldots + \frac{d_{x+n-1}}{(1+i)^n}\right),$$

$${}_5A_{60} = 50/65130 \cdot (1870/1{,}12 + 1949/1{,}12^2 + 2021/1{,}12^3 +$$

$$+ 2089/1{,}12^4 + 2153/1{,}12^5) = 5{,}536 \text{ млн ден. ед.}$$

б) Пусть страхователи в возрасте 60 лет платят ежегодно страховые ставки n лет в конце каждого года. Сумма современных стоимостей первых годовых ставок к началу 1-го года:

$$\frac{{}_nP_x \cdot l_{x+1}}{\left(\dfrac{1}{x} + i\right)},$$

вторых годовых ставок — $\dfrac{{}_nP_x \cdot l_{x+2}}{\left(\dfrac{1}{x}+i\right)^2}$ и т. д.

Общая современная стоимость всех страховых взносов:

$$S = {}_nP_x \cdot [(l_{x+1})/(1+i) + (l_{x+2})/(1+\mathrm{i})^2 + ... + (l_{x+n})/(1+i)^n]. \qquad (17.52)$$

Современна стоимость выплат по случаю смерти страхователей:

$$S = \frac{S_1 d_x}{1+i} + \frac{S_1 d_{x+1}}{(1+i)^2} + \ldots + \frac{S_1 d_{x+n-1}}{(1+i)^n}. \qquad (17.53)$$

и тогда величина годового взноса составит

$${}_nP_x = S\,\frac{\left(\dfrac{d_x}{1+i} + \dfrac{d_{x+1}}{(1+i)^2} + \ldots + \dfrac{d_{x+n-1}}{(1+i)^n}\right)}{[l_{x+1}/(1+i) + l_{x+2}/(1+i)^2 + \ldots + l_{x+n}/(1+i)^n]}, \qquad (17.54)$$

где $l_{61} = 63260$; $l_{62} = 61311$; $l_{63} = 59290$; $l_{64} = 57201$; $l_{65} = 55048$,

$${}_5P_{60} =$$

$$= \frac{50\,(1870/1{,}12 + 1949/1{,}12^2 + 2021/1{,}12^3 + 2089/1{,}12^4 + 2153/1{,}12^5)}{63260/1{,}12 + 61311/1{,}12^2 + 59290/1{,}12^3 + 57201/1{,}12^4 + 55048/1{,}12^5} =$$

=1,676 млн ден. ед.

в) При платежах в начале каждого года современная стоимость всех страховых взносов:

$$S = {}_nP_x [l_x + l_{x+1}/(1+i) + \ldots + l_{x+n-1}/(1+i)^{n-1}] =$$

$$= \frac{S_1 d_x}{1+i} + \frac{S_1 d_{x+1}}{(1+i)} + \ldots + \frac{S_1 d_{x+n-1}}{(1+i)^n}. \qquad (17.55)$$

Величина годового взноса:

$${}_nP_x = \frac{S_1\left(\dfrac{d_x}{1+i} + \dfrac{d_{x+1}}{(1+i)^2} + \ldots + \dfrac{d_{x+n-1}}{(1+i)^n}\right)}{[l_x + l_{x+1}/(1+i) + \ldots + l_{x+n-1}/(1+i)^{n-1}]}, \qquad (17.56)$$

$$P =$$

$$= \frac{50\,(1870/1{,}12 + 1949/1{,}12^2 + 2021/1{,}12^3 + 2089/1{,}12^4 + 2153/1{,}12^5)}{65130 + 63260/1{,}12 + 61311/1{,}12^2 + 59290/1{,}12^3 + 57201/1{,}12^4} =$$

$$=1{,}448 \text{ млн ден. ед.}$$

17.7.4. Пенсионное страхование

Пример 24. Мужчина в возрасте 60 лет желает получать дополнительную пенсию в размере 1 млн ден. ед. в течение последующих 10 лет. Требуется опередить величину нетто-ставки для выплаты страховых сумм в начале каждого года для случая единовременной уплаты страховой суммы в начале срока страхования. Годовая процентная ставка — 12%.

Решение. Обозначим $S_1 = 1$ млн ден. ед., $x = 60$, $n = 10$, $i = 0{,}12$.

а) Первая дополнительная пенсионная выплата происходит сразу после заключения договора, и выплаченная сумма равна $l_x S_1$, вторая — $l_{x+1} S_1$, ..., десятая — $l_{x+9} S_1$.

Сумма современных стоимостей пенсионных выплат:

$$S = l_x S_1 + (l_{x+1} S_1)/(1+i) + \ldots + (l_{x+n-1} S_1)/(1+i)^{n-1}. \qquad (17.57)$$

Сумма платежей страхователей:

$$S = {}_n a_x \cdot l_x,$$

$${}_n a_x = S_1/l_x\,[l_x + l_{x+1}/(1+i) + \ldots + l_{x+n-1}/(1+i)^{n-1}]. \qquad (17.58)$$

Подставляя $l_{60} = 65130$; $l_{61} = 63260$; $l_{62} = 61311$; $l_{63} = 59290$; $l_{64} = 57201$; $l_{65} = 55048$; $l_{66} = 52831$; $l_{67} = 50534$; $l_{68} = 48221$; $l_{69} = 45836$ в формулу (17.58), получим ${}_{10}a_{60}$ млн ден. ед.

б) Первая дополнительная пенсионная выплата происходит в конце 1-го года.

Тогда сумма современных стоимостей пенсионных выплат будет:

$$S = l_{x+1} S_1/(1+i) + l_{x+2} S_1/(1+i)^2 + \ldots + l_{x+n} S_1/(1+i)^n,$$

$${}_n a_x = S_1/l_x\,[l_{x+1}/(1+i) + l_{x+2}/(1+i)^2 + \ldots + l_{x+n}/(1+i)^n],$$

$${}_{10}a_{60} = 4{,}852 \text{ млн ден. ед.}$$

Пример 25. Мужчина, достигший возраста 55 лет, желает получить в течение 10 лет дополнительную пенсию в размере 1 млн ден. ед., начиная с достижения 60-летнего возраста. Для этого в течение 6 лет он платит страховые взносы в начале каждого года. Требуется определить величину нетто-ставки для годовой процентной ставки 12 % годовых.

Решение. Обозначим: $S_1 = 1$ млн $x = 60$, $n_1 = 6$, $n_2 = 10$.

К моменту достижения 60 лет наращенная сумма первого страхового взноса равна

$$l_{x-n1+1}(1+i)^{n1-1} \cdot {}^{n1}_{n2}a_x,$$

второго —

$$l_{x-n1+2}(1+i)^{n1-2} \cdot {}^{n1}_{n2}a_x \text{ и т. д.}$$

Общая сумма страховых взносов:

$$S = [l_{x-n1+1}(1+i)^{n1-1} + l_{x-n1+2}(1+i)^{n1-2} + \ldots + l_x]\ {}^{n1}_{n2}a_x. \qquad (17.59)$$

Сумма современных стоимостей пенсионных выплат:

$$S = [l_x + l_{x+1}/(1+i) + \ldots + l_{x+n2-1}/(1+i)^{n2-1}] \cdot S_1,$$

$${}^{n1}_{n2}a_x = S_1(l_x + l_{x+1}/(1+i) + \ldots + l_{x+n2-1}/(1+i)^{n2-1}) /$$

$$/ [l_{x-n1+1}(1+i)^{n1-1} + l_{x-n1+2}(1+i)^{n1-2} + \ldots + l_x]. \qquad (17.60)$$

Подставляя значения l_{x+y}, взятые из «таблицы смертности», получим:

$${}^{6}_{10}a_{60} = 0{,}648 \text{ млн ден. ед.}$$

Пример 26. Мужчина в возрасте 60 лет хочет заключить страховой договор на следующих условиях: начиная с момента страхования в начале каждого года страховщик обязуется платить страхователю пожизненно S_1 руб. Страхователь оплачивает единовременный взнос ${}_na_x$ при заключении договора. Процентная ставка банка — 9% годовых. Требуется определить нетто-ставку пожизненной ренты.

Современная стоимость такой финансовой ренты:

$$S = l_x S_1 + (l_{x+1}S_1)/(1+i) + (l_{x+2}S_1)/(1+i)^2 + \ldots +$$

$$+ (l_{x+n}S_1)/(1+i)^n, \qquad (17.61)$$

где $x + n$ — предельный возраст в «таблице смертности».

С другой стороны, страхователи выплатят сумму

$$S = l_x \cdot {}_na_x$$

$${}_na_x = S/l_x\,[l_x + l_x/(1+i) + \ldots + l_{x+n}/(1+i)^n].$$

На практике используют таблицы с «коммутационными» числами, рассчитанными в таблице смертности. Умножим числитель и знаменатель на $(1 + i)^x$ и введем обозначения:

$$D_x = l_x / (1 + i)^x; \quad N_x = D_x + D_{x+1} + \ldots + D_{x+n}.$$

Тогда ${}_n a_x = N_x / D_x \cdot S_1$.

Для $x = 60$ лет при норме накопления 9% для мужчины в случае пожизненной ренты пренумерандо $D_{60} = 369{,}991036$; $N_{60} = 2930{,}070420$ и ${}_n a_{60} = 7{,}919$ млн ден. ед.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Таблица 1

Порядковые номера дней в обычном году

День месяца	Месяц											
	Январь	Февраль	Март	Апрель	Май	Июнь	Июль	Август	Сентябрь	Октябрь	Ноябрь	Декабрь
1	1	32	60	91	121	152	182	213	244	274	305	335
2	2	33	61	92	122	153	183	214	245	275	306	336
3	3	34	62	93	123	154	184	215	246	276	307	337
4	4	35	63	94	124	155	185	216	247	277	308	338
5	5	36	64	95	125	156	186	217	248	278	309	339
6	6	37	65	96	126	157	187	218	249	279	310	340
7	7	38	66	97	127	158	188	219	250	280	311	341
8	8	39	6,7	98	128	159	189	220	251	281	312	342
9	9	40	68	99	129	160	190	221	252	282	313	343
10	10	41	69	100	130	161	191	222	253	283	314	344
11	11	42	70	101	131	162	192	223	254	284	315	345
12	12	43	71	102	132	163	193	224	255	285	316	346
13	13	44	72	103	133	164	194	225	256	286	317	347
14	14	45	73	104	134	165	195	226	257	28.7	318	348
15	15	46	74	105	135	166	196	227	258	288	319	349
16	16	47	75	106	136	167	197	228	259	289	320	350
17	17	48	76	107	137	168	198	229	260	290	321	351
18	18	49	77	108	138	169	199	230	261	291	322	352
19	19	50	78	109	139	170	200	231	262	292	323	353
20	20	51	79	110	140	171	201	232	263	293	324	354
21	21	52	80	111	141	172	202	233	264	294	325	355
22	22	53	81	112	142	173	203	234	265	295	326	356
23	23	54	82	113	143	174	204	235	266	296	327	357
24	24	55	83	114	144	175	205	236	267	297	328	358
25	25	56	84	115	145	176	206	237	268	298	329	359
26	26	57	85	116	146	177	207	238	269	299	330	360
27	27	58	86	117	147	178	208	239	270	300	331	361
28	28	59	87	118	148	179	209	240	271	301	332	362
29	29	—	88	119	149	180	210	241	272	302	333	363
30	30	—	89	120	150	181	211	242	273	303	334	364
31	31	—	90	—	151	—	212	243	—	304	—	365

Таблица 2

Порядковые номера дней в високосном году

День месяца	Месяцы											
	Январь	Февраль	Март	Апрель	Май	Июнь	Июль	Август	Сентябрь	Октябрь	Ноябрь	Декабрь
1	1	32	61	92	122	153	183	214	245	275	306	336
2	2	33	62	93	123	154	184	215	246	276	307	337
3	3	34	63	94	124	155	185	216	247	277	308	338
4	4	35	64	95	125	156	186	217	248	278	309	339
5	5	36	65	96	126	157	187	‘218	249	279	310	340
6	6	37	66	97	127	158	188	219	250	280	311	341
7	7	38	67	98	128	159	189	220	251	281	312	342
8	8	39	68	99	129	160	190	221	252	282	313	343
9	9	40	69	100	130	161	191	222	253	283	314	344
10	10	41	70	101	131	162	192	223	254	284	315	345
11	11	42	71	102	132	163	193	224	255	285	316	346
12	12	43	72	103	133	164	194	225	256	286	317	347
13	13	44	73	104	134	165	195	226	257	287	318	348
14	14	45	74	105	135	166	196	227	258	288	319	349
15	15	46	75	106	136	167	197	228	259	289	320	350
16	16	47	76	107	137	168	198	229	260	290	321	351
17	17	48	77	108	138	169	199	230	261	291	322	352
18	18	49	78	109	139	170	200	231	262	292	323	353
19	19	50	79	110	140	171	201	232	263	293	324	354
20	20	51	80	111	141	172	202	233	264	294	325	355
21	21	52	81	112	142	173	203	234	265	295	326	356
22	22	53	82	113	143	174	204	235	266	296	327	357
23	23	54	83	114	144	175	205	236	267	297	328	358
24	24	55	84	115	145	176	206	237	268	298	329	359
25	25	56	85	116	146	-177	207	238	269	299	330	360
26	26	57	86	117	147	178	208	239	270	300	331	361
27	27	58	87	118	148	179	209	240	271	301	332	362
28	28	59	88	119	149	180	210	241	272	302	333	363
29	29	60	89	120	150	181	211	242	273	303	334	364
30	30	—	90	121	151	182	212	243	274	304	335	365
31	31	—	91	—	152	—	213	244	—	305	—	366

Приложение 2

Распределение критерия Дарбина–Уотсона для положительной автокорреляции (для 5% уровня значимости)

n	$V = 1$		$V = 2$		$V = 3$		$V = 4$		$V = 5$	
	d_1	d_2	d_1	d_2	d_1	d_2	d_1	d_2	d_1	d_2
15	1,08	1,36	0,95	1,54	0,82	1,75	0,69	1,97	0,56	2,21
16	1,10	1,37	0,98	1,54	0,86	1,73	0,74	1,93	0,62	2,15
17	1,13	1,38	1,02	1,54	0,90	1,71	0,78	1,90	0,67	2,10
18	1,16	1,39	1,05	1,53	0,93	1,69	0,82	1,87	0,71	2,06
19	1,18	1,40	1,08	1,53	0,97	1,68	0,86	1,85	0,75	2,02
20	1,20	1,41	1,10	1,54	1,00	1,68	0,90	1,83	0,79	1,99
21	1,22	1,42	1,13	1,54	4,03	1,67	0,93	1,81	0,83	1,96
22	1,24	1,43	1,15	1,54	1,05	1,66	0,96	1,80	0,86	1,94
23	1,26	1,44	1,17	1,54	1,08	1,66	0,99	1,79	0,90	1,92
24	1,27	1,45	1,19	1,55	1,10	1,66	1,01	1,78	0,93	1,90
25	1,29	1,45	1,21	1,55	1,12	1,66	1,04	1,77	0,95	1,89
26	1,30	1,46	1,22	1,55	1,14	1,65	1,06	1,76	0,98	1,89
27	1,32	1,47	1,24	1,56	1,16	1,66	1,08	1,76	1,01	1,86
28	1,33	1,48	1,26	1,56	1,18	1,65	1,10	1,75	1,03	1,85
29	1,34	1,48	1,27	1,56	1,20	1,65	1,12	1,74	1,05	1,84
30	1,35	1,49	1,28	1,57	1,21	1,65	1,14	1,74	1,07	1,83
31	1,36	1,50	1,30	1,57	1,23	1,65	1,16	1,74	1,09	1,83
32	1,37	1,50	1,31	1,57	1,24	1,65	1,18	1,73	1,11	1,82
33	1,38	1,51	1,32	1,58	1,26	1,65	1,19	1,73	1,13	1,81
34	1,39	1,51	1,33	1,58	1,27	1,65	1,21	1,73	1,16	1,81
35	1,40	1,52	1,34	1,58	1,28	1,65	1,22	1,73	1,16	1,80
36	1,41	1,52	1,35	1,59	1,29	1,65	1,24	1,73	1,18	1,80
37	1,42	1,53	1,36	1,59	1,31	1,66	1,25	1,72	1,19	1,80

Приложение 3

Критические точки распределения χ^2

Число степеней свободы k	Уровень значимости α					
	0,01	0,025	0,05	0,95	0,975	0,99
1	6,6	5,0	3,8	0,0039	0,00098	0,00016
2	9,2	7,4	6,0	0,103	0,051	0,020
3	11,3	9,4	7,8	0,352	0,216	0,115
4	13,3	11,1	9,5	0,711	0,484	0,297
5	15,1	12,8	11,1	1,15	0,831	0,554
6	16,8	14,4	12,6	1,64	1,24	0,872
7	18,5	16,0	14,1	2,17	1,69	1,24
8	20,1	17,5	15,5	2,73	2,18	1,65
9	21,7	19,0	16,9	3,33	2,70	2,09
10	23,2	20,5	18,3	3,94	3,25	2,56
11	24,7	21,9	19,7	4,57	3,82	3.05
12	26,2	23,3	21,0	5,23	4,40	3.57
13	27,7	24,7	22,4	5,89	5,01	4,11
14	29,1	26,1	23,7	6,57	5,63	4,66
15	30,6	27,5	25,0	7,26	6,26	5,23
16	32,0	28,8	26,3	7,96	6,91	5,81
17	33,4	30,2	27,6	8,67	7,56	6,41
18	34,8	31,5	28,9	9,39	8,23	7,01
19	36,2	32,9	30,1	10,1	8,91	7,63
20	37,6	34,2	31,4	10,9	9,59	8.26
21	38,9	35,5	32,7	11,6	10,3	8,90
22	40,3	36,8	33,9	12,3	11,0	9,54
23	41,6	38,1	35,2	13.1	11,7	10,2
24	43,0	39,4	36,4	13,8	12,4	10,9
25	44,3	40,6	37,7	14,6	13,1	11,5
26	45,6	41,9	38,9	15,4	13,8	12,2
27	47,0	43,2	40,1	16,2	14,6	12,9
28	48,3	44,5	41,3	16,9	15,3	13,6
29	49,6	45,7	42,6	17,7	16,0	14,3
30	50,9	47,0	43,8	18,5	16,8	15,0

Приложение 4

Критические точки распределения Стьюдента

Число степеней свободы k	Уровень значимости α (двусторонняя критическая область)					
	0,1	0,05	0,02	0,01	0,002	0,001
1	6,31	12,7	31,82	63,7	318,3	637,0
2	2,92	4,30	6,97	9,92	22,33	31,6
3	2,35	3,18	4,54	5,84	10,22	12,9
4	2,13	2,78	3,75	4,60	7,17	8,61
5	2,01	2,57	3,37	4,03	5,89	6,86
6	1,94	2,45	3,14	3,71	5,21	5,96
7	1,89	2,36	3,00	3,50	4,79	5,40
8	1,86	2,31	2,90	3,36	4.50	5,04
9	1,83	2,26	2,82	3,25	4,30	4,78
10	1,81	2,23	2,76	3,17	4,14	4,59
11	1,80	2,20	2,72	3,11	4,03	4,44
12	1,78	2,18	2,68	3,05	3,93	4,32
13	1,77	2,16	2,65	3,01	3,85	4,22
14	1,76	2,14	2,62	2,98	3,79	4,14
15	1,75	2,13	2,60	2,95	3,73	4,07
16	1,75	2,12	2,58	2,92	3,69	4,01
17	1,74	2,11	2.57	2,90	3,65	3,96
18	1,73	2,10	2,55	2,88	3,61	3,92
19	1,73	2,09	2,54	2,86	3,58	3,88
20	1,73	2,09	2,53	2,85	3,55	3,85
21	1,72	2,08	2,52	2,83	3,53	3,82
22	1,72	2,07	2,51	2,82	3,51	3,79
23	1,71	2,07	2,50	2,81	3,49	3,77
24	1,71	2,06	2,49	2,80	3,47	3,74
25	1,71	2,06	2,49	2,79	3,45	3,72
26	1,71	2,06	2,48	2,78	3,44	3,71
27	1,71	2,05	2.47	2,77	3,42	3,69
28	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
29	1,70	2,05	2.46	2,76	3,40	3,66
30	1,70	2,04	2,46	2,75	3,39	3,65
40	1,68	2,02	2,42	2,70	3,31	3,55
60	1,67	2,00	2,39	2,66	3,23	3,46
120	1,66	1,98	2,36	2,62	3,17	3,37
∞	1,64	1,96	2,33	2,58	3,09	3,37
Число степеней свободы k	0,05	0,025	0,01	0,005	0,001	0,0005
	Уровень значимости α (односторонняя критическая область)					

Приложение 5

Критические точки распределения Фишера–Снедекора
(k_1 — число степеней свободы большей дисперсии;
k_1 — число степеней свободы меньшей дисперсии)

Уровень значимости $\alpha = 0,01$												
k_2	k_1											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	4052	4999	5403	5625	5764	5989	5928	5981	6022	6056	6082	6106
2	98,49	99,01	90,17	99,25	99,33	99,30	99,34	99,36	99,36	99,40	99,41	99,42
3	34,12	30,81	29,46	28,71	28,24	27,91	27,67	27,49	27,34	27,23	27,13	27,05
4	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,98	14,80	14,66	14,54	14,45	14,37
5	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,45	10,27	10,15	10,05	9,96	9,89
6	13,74	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98	7,87	7,79	7,72
7	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	7,00	6,84	6,71	6,62	6,54	6,47
8	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,19	6,03	5,91	5,82	5,74	5,67
9	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,62	5,47	5,35	5,26	5,18	5,11
10	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,21	5,06	4,95	4,85	4,78	4,71
11	9,86	7,20	6,22	5,67	5,32	5,07	4,88	4,74	4,63	4,54	4,46	4,40
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,65	4,50	4,39	4,30	4,22	4,16
13	9,07	6,70	5,74	5,20	4,86	4,62	4,44	4,30	4,19	4,10	4,02	3,96
14	8,86	6,51	5,56	5,03	4,69	4,46	4,28	4,14	4,03	3,94	3,86	3,80
15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,14	4,00	3,89	3,80	3,73	3,67
16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	4,03	3,89	3,78	3,69	3,61	3,55
17	8,40	6,11	5,18	4,67	4,44	4,10	3,93	3,79	3,68	3,59	3,52	3,45

Уровень значимости $\alpha = 0{,}05$												
k_2	k_1											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	243	244
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,36	19,37	19,38	19,39	19,40	19,41
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,88	8,84	8,81	8,78	8,76	8,74
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,93	5,91
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,78	4,74	4,70	4,68
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,03	4,00
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,63	3,60	3,57
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,34	3,31	3,28
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,13	3,10	3,07
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,97	2,94	2,91
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,86	2,82	2,79
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,92	2,85	2,80	2,76	2,72	2,69
13	4,67	3,80	3,41	3,18	3,02	2,92	2,84	2,77	2,72	2,67	2,63	2,60
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,77	2,70	2,65	2,60	2,56	2,53
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,70	2,64	2,59	2,55	2,51	2,48
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,45	2,42
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,62	2,55	2,50	2,45	2,41	2,38

Приложение 6

Таблица значений функции $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x {}^{-\frac{x^2}{2}} dz$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,32	0,1255	0,64	0,2389	0,96	1,3315
0,01	0,0040	0,33	0,1293	0,65	0,2422	0,97	0,3340
0,02	0,0080	0,34	0,1331	0,66	0,2454	0,98	0,3365
0,03	0,0120	0,35	0,1368	0,67	0,2486	0,99	0,3389
0,04	0,0160	0,36	0,1406	0,68	0,2516	1,00	0,3413
0,05	0,0199	0,37	0,1443	0,69	0,2549	1,01	0,3438
0,06	0,0239	0,38	0,1480	0,70	0,2580	1,02	0,3461
0,07	0,0279	0,39	0,1517	0,71	0,2611	1,03	0,3485
0,08	0,0319	0,40	0,1554	0,72	0,2642	1,04	0,3508
0,09	0,0359	0,41	0,1591	0,73	0,2673	1,05	0,3531
0,10	0,0398	0,42	0,1628	0,74	0,2703	1,06	6,3554
0,11	0,0438	0,43	0,1664	0,75	0,2734	1,07	0,3577
0,12	0,0478	0,44	0,1700	0,76	0,2764	1,08	0,3599
0,13	0,0517	0,45	0,1736	0,77	0,2794	1,09	0,3621
0,14	0,0557	0,46	0,1772	0,78	0,2823	1,10	0,3643
0,15	0,0596	0,47	0,1-808	0,79	0,2852	1,11	0,3665
0,16	0,0636	0,48	0,1844	0,80	0,2881	1,12	0,3686
0,17	0,0675	0,49	0,1879	0,81	0,2910.	1,13	0,3708
0,18	0,0714	0,50	0,1915	0,82	0,2939	1,14	0,3729
0,19	0,0753	0,51	0,1950	0,83	0,2967	1,15	0,3749
0,20	0,0793	0,52	0,1985	0,84	0,2995	1,16	0,3770
0,21	0,0832	0,53	0,2019	0,85	0,3023	1,17	0,3790

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,22	0,0871	0,54.	0,2054	0,86	0,3051	1,18	0,3810
0,23	0,0910	0,55	0,2088	0,87	0,3078	1,19	0,3830
0,24	0,0948	0,56	0,2123	0,88	0,3106	1,20	0,3849
0,25	0,0987	0,57	0,2157	0,89	0,3133	1,21	0,3869
0,26	0,1026	0,58	0,2190	0,90	0,3159	1,22	0,3883
0,27	0,1064	0,59	0,2224	0,91	0,3186	1,23	0,3907
0,28	0,1103	0,60	0,2257	0,92	0,3212	1,24	0,3925
0,29	0,1141	0,61	0,2291	0,93	0,3228	1,25	0,3944
0,30	0,1179	0,62	0,2324	0,94	0,3264	1,26	0,3962
0,31	0,1217	0,63	0,2357	0,95	0,3289	1,27	0,3980
1,28	0,3997	1,61	0,4463	1,94	0,4738	2,54	0,4945
1,29	0,4015	1,62	0,4474	1,95	0,4744	2,56	0,4948
1,30	0,4032	1,63	0,4484	1,96	0,4750	2,58	0,4951
1,31	0,4049	1,64	0,4495	1,97	0,4756	2,60	0,4953
1,32	0,4066	1,65	0,4505	1,98	0,4761	2,62	0,4956
1,33	0,4082	1,66	0,4515	1,99	0,4767	2,64	0,4959
1,34	0,4099	1,67	0,4525	2,00	0,4772	2,66	0,4961
1,35	0,4115	1,68	0,4535	2,02	0,4783	2,68	0,4963
1,36	0,4131	1,69	0,4545	2,04	0,4793	2,70	0,4965
1,37	0,4147	1,70	0,4554	2,06	0,4803	2,72	0,4967
1,38	0,4162	1,71	0,4564	2,08	0,4812	2,74	0,4969
1,39	0,4177	1,72	0,4573	2,10	0,4821	2,76	0,4971
1,40	0,4192	1,73	0,4582	2,12	0,4830	2,78	0,4973
1,41	0,4207	1,74	0,4591	2,14	0,4838	2,80	0,4974
1,43	0,4236	1,76	0,4608	2,18	0,4854	2,84	0,4977
1,44	0,4251	1,77	0,4616	2,20	0,4861	2,86	0,4979
1,45	0,4265	1,78	0,4625	2,22	0,4868	2,88	0,4980

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1,46	0,4279	1,79	0,4633	2,24	0,4875	2,90	0,4981
1,47	0,4292	1,80	0,4641	2,26	0,4881	2,92	0,4982
1,48	0,4306	1,81	0,4649	2,28	0,4887	2,94	0,4984
1,49	0,4319	1,82	0,4656	2,30	0,4893	2,96	0,4985
1,50	0,4332	1,83	0,4664	2,32	0,4898	2,98	0,4986
1,51	0,4345	1,84	0,4671	2,34	0,4904	3,00	0,49865
1.52	0,4357	1,85	0,4678	2,36	0,4909	3,20	0,49931
1.53	0,4370	1,86	0,4686	2,38	0,4913	3,40	0,49966
1,54	0,4382	1,87	0,4693	2,40	0,4918	3,60	0,499841
1,55	0,4394	1,88	0,4699	2,42	0,4922	3,80	0,499928
1,56	0,4406	1,89	0,4706	2,44	0,4927	4,00	0,499968
1,57	0,4418	1,90	0,4713	2,46	0,4931	4,50	0,499997
1,58	0,4429	1,91	0,4719	2,48	0,4934	5,00	0,499997
1,59	0,4441	1,92	0,4726	2,50	0,4938		
1,60	0,4452	1,93	0,4732	2,52	0,4941		

Список литературы

К главам 1–4

Кузнецов Ю. Н., Кузубов В. И., Волощенко А. Б. Математическое программирование. М.: Высшая школа, 1976.

Замков О. О., Толстопятенко А. В., Черемных Ю. Н. Математические методы в экономике: Учебник для вузов. М.: МГУ им. М. В. Ломоносова, ДИС, 1998.

Экономико-математические методы и прикладные модели / Под ред. В. В. Федосеева. М.: ЮНИТИ, 1999.

Фомин Г. П. Математические методы и модели в коммерческой деятельности: Учебник для вузов. М.: Финансы и статистика, 2001.

Монахов А. В. Математические методы анализа экономики. СПб.: Питер, 2002.

Конюховский П. В. Математические методы исследования операций в экономике. СПб.: Питер, 2002.

Красс М. С., Чупрынов Б. П. Основы математики и ее приложения в экономическом образовании. 4-е изд. М.: Дело, 2003.

Экономико-математические методы и модели: Учебное пособие для вузов / Под ред. С. И. Макарова, А. П. Сизикова, Б. П. Чупрынова. Самара: Изд-во Самарской государственной экономической академии, 2004.

К главе 5

Айвазян С. А., Мхитарян В. С. Теория вероятностей и прикладная статистика. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2001.

Вентцель Е.С. Теория вероятностей. М.: Высшая школа, 1999.

Гмурман В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. М.: Высшая школа, 2001.

Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Высшая школа, 2002.

Калинина В. Н., Панкин В. Ф. Математическая статистика. М.: Высшая школа, 1994.

Количественные методы в экономических исследованиях / Под ред. М. В. Грачевой, Л. Н. Фадеевой, Ю. Н. Черемных. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2004.

Красс М. С. Математика в экономике. Основы математики. М.: ФБК-ПРЕСС, 2005.

Красс М. С., Чупрынов Б. П. Математика в экономике. Математические методы и модели. М.: Финансы и статистика, 2007.

К главам 6–8

Бывшев В. А. Введение в эконометрию. Ч. 2. М.: Финансовая академия при Правительстве РФ, 2003.

Доугерти К. Введение в эконометрику / Пер. с англ. М.: ИНФРА-М, 2001.

Кулинич Е. И. Эконометрия. М.: Финансы и статистика, 2001.

Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика. — М.: ИНФРА-М, 2001.

Эконометрика: Учебник / Под ред. И. И. Елисеевой. М.: Финансы и статистика, 2002.

Кремер Н. Ш., Путко Б. А. Эконометрика: Учебник для вузов / Под ред. проф. Н. Ш. Кремера. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2003.

Красс М. С., Чупрынов Б. П. Математика для экономистов. СПб.: Питер, 2004.

К главе 9

Ашманов С. А. Введение в математическую экономику. М.: Наука, 1984.

Бережная Е. В., Бережной В. И. Математические методы моделирования экономических систем. М.: Финансы и статистика, 2002.

Вентцель Е. С. Исследование операций. Задачи, принципы, методология. М.: Наука, 1988.

Дрогобыцкий И. Н. Информационное моделирование экономических систем. М.: Финансовая академия, 1999.

Замков О. О., Толстопятенко А. В., Черемных Ю. Н. Математические методы в экономике. М.: ДИС, 2001.

Интрилигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория. М.: Прогресс, 1975.

Красс М. С. Математика в экономике. Основы математики. М.: ФБК-ПРЕСС, 2005.

Красс М. С., Чупрынов Б. П. Математика в экономике. Математические методы и модели. М.: Финансы и статистика, 2007.

Экономико-математическое моделирование / Под ред. И. Н. Дрогобыцкого. М.: Экзамен, 2004.

К главе 10

Агапова Т. А., Серегина С. Ф. Макроэкономика. М.: ДИС, 1997.

Воркуев Б. Л. Модели макро- и микроэкономики. М.: ДИС, 1999.

Кундышева Е. С. Математическое моделирование в экономике. М.: Торгово-издательская корпорация «Дашков и К°», 2004.

Лукаш Е. Н., Шакунова Е. Э. Теоретические подходы к моделированию инфляцонных процессов // Макроэкономическая теория и проблемы современной России. Гл. 1. М.: ТЕИС, 2001.

Тарасевич Л. С., Гальперин В. М., Гребенников П. И., Леусский А. И. Макроэкономика. СПб.: Санкт-Петербургский государственный университет экономики и финансов, 1999.

Туманова Е. А., Шагас М. Л. Макроэкономика. Элементы продвинутого подхода. М.: Инфра-М, 2004.

http//www.online.ru/sp/iet/trends/infl/info.rhtml

К главе 11

Ашманов С. А. Введение в математическую экономику. М.: Наука, 1984.

Глухов В. В., Лисочкина Т. В., Некрасова Т. П. Экономические основы экологии. СПб.: Спецлитература, 1997.

Гринин А. С., Орехов Н. А., Новиков В. Н. Математическое моделирование в экологии. М.: ЮНИТИ, 2003.

Красс М. С. Математика в экономике. Основы математики. М.: ФБК-ПРЕСС, 2005.

Красс М. С., Чупрынов Б. П. Математика в экономике. Математические методы и модели. М.: Финансы и статистика, 2007.

Красс М. С. Моделирование эколого-экономических систем. М., Инфра-М, 2010.

Ляпина А. А. Экономика, экология, затраты. М.: ТЕИС, 1997.

Медоуз Д. Х, Медоуз Д. Л., Рандерс И. За пределами роста. М.: Прогресс–Пангея, 1994.

Моисеев Н. Н. Алгоритмы развития. М.: Наука, 1987.

Муравей Л. А. Экология и безопасность жизнедеятельности. М.: ЮНИТИ, 2000.

Рюмина Е. В. Экологический фактор в экономико-математических моделях. М., 1980.

Сидоренко В. Н. Системная динамика. М.: ТЕИС, 1998.

Форрестер Дж. Мировая динамика. М.: Наука, 1978.

Экология — экономика — политика / Под ред. К. Я. Кондратьева. СПб., 1996.

Юрга В. А. Информационные аспекты развития современного мирового хозяйства / Канд. дисс. М., 2001.

Porter M. E. The competitive Advantages of Nations. New York, 1990.

К главе 12

Балацкий Е. В., Свистунов В. Р. Прогнозирование внешнего долга: модели и оценки // МЭиМО, 2001. № 2, 3.

Вавилов А., Трефилов Г. Стабилизация и управление государственным долгом России // Вопросы экономики, 1997. № 12.

Вавилов Ю. Я. Государственный долг. М.: Перспектива, 2000.

Замков О. О. Бюджетный дефицит, государственный долг и экономический рост // Вестник Московского университета. Сер. 6. Экономика, 1997. № 2.

Кнастер А. Эффективность и прогнозирование государственного внешнего долга России. М.: Япония-Сегодня, 1998.

Когутовская Н. Государственный долг // Макроэкономическая теория и анализ конкретных ситуаций. М.: Экономический факультет МГУ–ТЕИС, 2000.

Красс М. С. Математика в экономике. Основы математики. М.: ФБК-ПРЕСС, 2005.

Красс М. С., Цвирко С. Э. Модель управления динамикой государственного долга // МЭиМО, 2002. № 4.

Красс М. С., Цвирко С. Э. Статистические зависимости основных параметров динамики внешнего долга // Бизнес-академия, 2003. М.: № 10 (30)–10 (31).

Соколовский Л. Е. Финансирование бюджетного дефицита и внутренний государственный долг // Экономика и математические методы, 1991. № 27. Вып. 2.

Тарасевич Л. С., Гальперин В. М., Гребенников П. И., Леусский А. И. Макроэкономика. СПб.: Санкт-Петербургский государственный университет, 1999.

Теория ветвления и нелинейные задачи на собственные значения. М.: Мир, 1974.

Туманова Е. А., Шагас Н. Л. Макроэкономика. Элементы продвинутого подхода. М.: Инфра-М, 2004.

Цвирко С. Э. Моделирование динамики внешней задолженности России / Канд. дисс. М., 2004.

Avramovic Dragoslav. Economic growth and external debt. Maryland: Johns Hopkins Press, 1965.

Barro R. J. On the determination of the public debt // Journal of political economy, 1979. Vol. 87.

Domar E. The «Burden of the debt» and the national income / The American Economical Rewiew, 1944. Vol. 34.

IMF Survey. A Publication of the International Monetary Fund. Vol. 28, Number 3, February 8, 1999. Washington, D. C.

К главе 13

Красс М. С., Чупрынов Б. П. Математика в экономике. Математические методы и модели. М.: Финансы и статистика, 2007.

Лабскер Л. Г., Бабешко Л. О. Теория массового обслуживания в экономической сфере. М.: ЮНИТИ, 1998.

Лабскер Л. Г., Михайлова В. П., Серегин Р. А. Математическое моделирование финансово-экономических ситуаций с применением компьютера. М.: Финансовая академия при Правительстве РФ, 1997.

Матвеев В. Ф., Ушаков В. Г. Системы массового обслуживания. М.: МГУ, 1984.

Саати Т. Л. Математические методы исследования операций. М.: Воениздат, 1963.

Хинчин А. Я. Работы по математической теории массового обслуживания. М.: ГИФМЛ, ГФОС, 1963.

К главе 14

Джексон П. Введение в экспертные системы. М.: Вильямс, 2001.

Дик В. В. Методология формирования решений в экономических системах и инструментальные средства их поддержки. М.: Финансы и статистика, 2000.

Друкер П. Эффективное управление. Экономические задачи и оптимальные решения. М.: ФАИР-ПРЕСС, 2003.

Емельянов А. А. Имитационное моделирование в управлении рисками. СПб.: СПбГИЭА, 2000.

Калянов Г. Н. Теория и практика реорганизации бизнес-процессов / Серия «Реинжиниринг бизнеса». М.: Синтег, 2000.

Лагоша Б. А. и др. Методы и модели совершенствования организационных структур. М.: Наука, 1988.

Ойхман Е. Г., Попов Э. В. Реинжиниринг бизнеса: реинжиниринг организаций и информационные технологии. М.: Финансы и статистика, 1997.

Робсон М., Уллах Ф. Практическое руководство по реинжинирингу бизнес-процессов. М.: Аудит, ЮНИТИ, 1997.

Субанова О. С. Моделирование процессов реинжиниринга промышленных предприятий / Канд. дисс. М., 2002.

Тельнов Ю. Ф. Реинжиниринг бизнес-процессов. М.: Финансы и статистика, 2004.

Хаммер М., Чампи Дж. Реинжиниринг корпорации: Манифест революции в бизнесе. СПб.: Санкт-Петербургский университет, 1997.

Шеер А. В. Моделирование бизнес-процессов. М.: Весть-Метатехнология, 2000.

К главам 15–17

Кочович Е. Финансовая математика: Теория и практика финансово-банковских расчетов / Пер. с серб. / Предисл. Е. М. Четыркина. М.: Финансы и статистика, 1994.

Бухвалов А. В., Идельсон А. В. Самоучитель по финансовым расчетам. М.: Мир, Пресс-сервис, 1997.

Практикум по страховому делу: Учеб. пособие для вузов / Под ред. проф. В. И. Рябикина. М.: Финстатинформ, 1998.

Уотшем Т. Дж., Паррамоу К. Количественные методы в финансах: Учеб. пособие для вузов / Пер. с англ. под ред. М. Р. Ефимовой. М.: Финансы, ЮНИТИ, 1999.

Капельян С. Н., Левкович О. А. Основы коммерческих и финансовых расчетов. Минск: НТЦ АПИ, 1999.

Ковалев В. В., Уланов В. А. Курс финансовых вычислений. М.: Финансы и статистика, 2002.

Красс М. С., Чупрынов Б. П. Математика для экономистов. 2-е изд. СПб.: Питер, 2005.

Четыркин Е. М. Финансовая математика. М.: Дело, 2002.

Предметный указатель